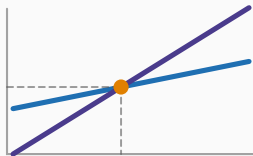


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 2 : La dérivée, ou la notion de marginal



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

La question que pose la dérivée

Du taux d'accroissement à la dérivée

Lire le signe et la valeur

Les limites de l'outil

Ce qu'il faut retenir

La question que pose la dérivée

La question

Votre entreprise produit 50 unités. On vous demande : « si on en produit **une de plus**, de combien le coût augmente-t-il ? »

Ce n'est pas le coût total qui vous intéresse. C'est ce que coûte **la prochaine unité**. Aucun gestionnaire ne décide sur le total ; tous décident sur le supplément.

Le mot que les économistes emploient

Ce supplément s'appelle le **coût marginal**. De la même manière, la recette marginale est ce que rapporte l'unité suivante, et la productivité marginale ce qu'apporte l'ouvrier suivant.

« Marginal » veut dire : *à la marge*, pour une unité de plus. La dérivée est l'outil mathématique qui calcule exactement cela.

L'idée à retenir avant toute formule

La dérivée mesure la vitesse à laquelle une fonction change.

Elle répond à : quand x augmente d'un tout petit peu, de combien $f(x)$ change-t-il ?

Du taux d'accroissement à la dérivée

Première étape : le taux d'accroissement

Taux d'accroissement

Entre a et $a + h$, le **taux d'accroissement** de f vaut

$$\tau = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

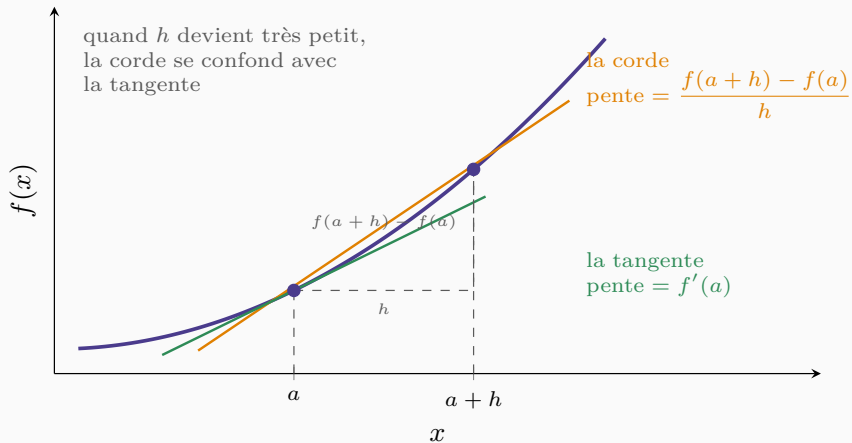
C'est la variation de f divisée par la variation de x .

C'est la pente de la corde

Numérateur : de combien on monte. Dénominateur : de combien on avance. Le rapport est une **pente**.

Géométriquement, c'est la pente de la droite qui joint les deux points de la courbe : la *corde*.

Deuxième étape : faire tendre h vers zéro



Nombre dérivé

Le **nombre dérivé** de f en a est la limite du taux d'accroissement quand h devient infiniment petit :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est la **pente de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a .

Pourquoi passer à la limite

Le taux d'accroissement dépend de h : entre 50 et 60 unités on ne trouve pas la même chose qu'entre 50 et 51. Ce n'est pas une propriété du point a , c'est une propriété d'un intervalle.

En faisant tendre h vers zéro, on obtient un nombre qui ne dépend plus que de a : la pente **au point** a . C'est ce nombre qu'on appelle la dérivée.

La dérivée de $f(x) = x^2$ en $a = 3$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

Quand h tend vers 0, ce taux tend vers 6. Donc $f'(3) = 6$.

Ce qu'il faut voir dans ce calcul

On simplifie par h **avant** de le faire tendre vers zéro. C'est tout le mécanisme : le h du dénominateur disparaît, et ce qui reste a un sens en $h = 0$.

Vous ne referez presque jamais ce calcul : le chapitre 3 donne les formules toutes faites. Mais il faut l'avoir vu une fois pour savoir d'où elles viennent.

Fonction dérivée

En faisant ce calcul non pas en un point mais en tout point, on obtient une **nouvelle fonction**, notée f' , qui à chaque x associe la pente de la tangente en x .

Pour $f(x) = x^2$, on trouve $f'(x) = 2x$ – et l'on retrouve bien $f'(3) = 6$.

Deux objets à ne pas confondre

- $f'(a)$ est un **nombre** : la pente en un point précis.
- f' est une **fonction** : la pente en tout point.

Toute la suite du cours travaille sur la fonction f' , parce que c'est elle qui permet de chercher les points où la pente s'annule.

Lire le signe et la valeur

Signe de la dérivée et sens de variation

Si...	alors la tangente...	et f ...
$f'(x) > 0$	monte	croît
$f'(x) < 0$	descend	décroît
$f'(x) = 0$	est horizontale	marque un palier

Lecture immédiate en gestion

Un profit dont la dérivée est positive : produire une unité de plus **augmente** le profit. Il faut continuer.

Un profit dont la dérivée est négative : l'unité suivante **coûte** plus qu'elle ne rapporte. Il fallait s'arrêter avant.

Entre les deux, la dérivée s'annule : c'est là qu'est l'optimum. Tout le chapitre 5 tient dans cette phrase.

Un coût marginal, chiffré

Avec $C(q) = 300 + 8q + 0,2q^2$, on obtient (chapitre 3) $C'(q) = 8 + 0,4q$.

- $C'(20) = 16$: à 20 unités, la 21^e coûte environ 16 dirhams.
- $C'(100) = 48$: à 100 unités, la 101^e en coûte 48.

La décision qui en découle

Si le prix de vente est de 40 dirhams, produire la 21^e unité est rentable ($16 < 40$), produire la 101^e ne l'est pas ($48 > 40$).

Le coût marginal croît : c'est la traduction chiffrée de la saturation de l'appareil productif. C'est aussi pourquoi il existe une quantité optimale finie.

L'approximation par la tangente

Pour une petite variation Δx :

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a) \Delta x$$

En pratique

$C(50) = 300 + 400 + 500 = 1200$ et $C'(50) = 28$.

Estimation de $C(52)$: $1200 + 28 \times 2 = 1256$. Valeur exacte : $300 + 416 + 540,8 = 1256,8$.

Erreur : moins de un dirham sur mille deux cent cinquante.

Pourquoi cette formule est celle que vous utiliserez le plus

Elle dit : sur un petit intervalle, **on peut remplacer la courbe par sa tangente**. C'est ce que fait tout budget prévisionnel, toute étude de sensibilité, tout raisonnement « toutes choses égales par ailleurs ».

Elle cesse d'être fiable dès que Δx devient grand : la courbe s'écarte alors de sa tangente.

Les limites de l'outil

Quand une fonction n'est pas dérivable

Les deux cas à connaître

1. La courbe présente un **angle** : les pentes à gauche et à droite diffèrent, il n'y a pas de tangente unique.
2. La courbe présente un **saut** : la fonction n'est même pas continue.

Ce n'est pas un cas d'école

Un barème d'imposition par tranches présente des angles. Une grille tarifaire par paliers présente des sauts : le 101^e article passe le client dans une remise différente.

En gestion, ces fonctions existent. On les traite alors **par morceaux** : on dérive sur chaque intervalle où la règle ne change pas.

Dérivée seconde

La dérivée de f' s'appelle la **dérivée seconde**, notée f'' .

Si f' mesure la vitesse de f , alors f'' mesure la vitesse de f' : c'est l'**accélération**.

Un exemple qu'on lit tous les jours

« Le chiffre d'affaires continue de croître, mais moins vite qu'au trimestre précédent. »

En termes de dérivées : $f' > 0$ (il croît) et $f'' < 0$ (il ralentit). Deux informations distinctes, que seule la dérivée seconde permet de séparer.

À quoi elle servira

La dérivée seconde décidera, au chapitre 4, si un point où f' s'annule est un maximum ou un minimum. C'est sa fonction principale dans ce cours.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. La dérivée est la limite du taux d'accroissement : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
2. Géométriquement, c'est la **pente de la tangente**.
3. En gestion, c'est la notion **marginale** : coût marginal, recette marginale, productivité marginale.
4. Son **signe** donne le sens de variation ; sa **valeur** donne l'effet d'une unité de plus.
5. La dérivée seconde mesure l'accélération, et servira à trancher entre maximum et minimum.

La suite

Personne ne calcule une dérivée par la limite. Le chapitre 3 donne les huit formules et les quatre règles qui permettent de dériver toutes les fonctions de ce cours en quelques secondes.