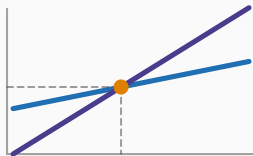


Mathématiques pour la gestion

Chapitre 3 : Calculer une dérivée



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Le principe

Les dérivées de référence

Les quatre règles

S'organiser

Ce qu'il faut retenir

Le principe

Un chapitre purement technique, et c'est voulu

Ce qu'on va faire

Le chapitre 2 a donné le **sens** de la dérivée. Celui-ci donne la **mécanique**.

Il tient en deux listes : huit dérivées de référence, quatre règles de combinaison. Toute fonction de ce cours se dérive en assemblant ces douze éléments.

Pourquoi ne pas s'en dispenser

Un gestionnaire dispose d'un tableur et d'un logiciel. Mais un logiciel ne vous dit pas **quelle** dérivée demander, ni si le résultat est plausible.

Savoir dériver à la main un coût, une recette, une fonction de production prend cinq minutes à apprendre et évite des erreurs de raisonnement bien plus coûteuses.

Les dérivées de référence

Huit formules

$f(x)$	$f'(x)$	Condition
k (constante)	0	
x	1	
x^n	$n x^{n-1}$	n entier ou réel
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$

La ligne la plus rentable

$x^n \mapsto n x^{n-1}$ couvre à elle seule presque tout le cours.

Elle vaut pour **tout** exposant : $\sqrt{x} = x^{1/2}$ donne $\frac{1}{2}x^{-1/2}$, et $1/x = x^{-1}$ donne $-x^{-2}$. Les lignes 4 et 5 du tableau ne sont donc que des cas particuliers de la ligne 3.

Retenez la règle de la puissance; le reste suit.

La règle en trois mots

On **descend l'exposant** devant, et on **retire un** à l'exposant.

Quatre applications immédiates

$$x^3 \rightarrow 3x^2; x^{10} \rightarrow 10x^9; x^{1/2} \rightarrow \frac{1}{2}x^{-1/2}; x^{-1} \rightarrow -x^{-2}.$$

La seule fonction égale à sa dérivée

$(e^x)' = e^x$. La fonction et sa vitesse de croissance sont le même objet.

C'est précisément ce qui définit une croissance **à taux constant** : plus la grandeur est grande, plus elle croît vite, exactement dans la même proportion. D'où sa place naturelle en finance.

Les quatre règles

Les deux règles faciles

$$(u + v)' = u' + v' \qquad (k u)' = k u'$$

Le coût total du fil conducteur

$$C(q) = 300 + 8q + 0,2q^2$$

On dérive terme à terme : $300 \rightarrow 0$, $8q \rightarrow 8$, $0,2q^2 \rightarrow 0,2 \times 2q = 0,4q$.

$$\boxed{C'(q) = 8 + 0,4q}$$

Lecture

Les charges fixes disparaissent à la dérivation : **elles n'influencent pas la décision marginale**. Ce résultat, obtenu en une ligne de calcul, est un principe de gestion à part entière : les coûts déjà engagés ne doivent pas entrer dans le choix de la quantité à produire.

Règle du produit

$$(u v)' = u' v + u v'$$

Pourquoi ce n'est pas $u' v'$

Un rectangle de côtés u et v a pour aire uv . Si les deux côtés s'allongent un peu, l'aire gagne **deux bandes** : une de hauteur v due à l'allongement de u , une de largeur u due à l'allongement de v .

D'où la somme des deux termes. L'erreur classique consiste à n'en compter qu'un.

Une recette à prix variable

Si le prix baisse quand on vend plus : $p(q) = 50 - 0,1q$, alors $R(q) = qp(q)$.

$$R'(q) = 1 \times (50 - 0,1q) + q \times (-0,1) = 50 - 0,2q$$

La recette marginale décroît **deux fois plus vite** que le prix. Vendre une unité de plus oblige à baisser le prix sur toutes les autres.

Règle du quotient

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Deux repères pour ne pas se tromper

Le numérateur ressemble à la règle du produit, mais avec un **moins** — et l'ordre compte : c'est toujours $u'v$ d'abord.

Le dénominateur est v^2 , jamais v .

Le coût moyen

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{300 + 8q + 0,2q^2}{q}$$

Deux voies, un seul résultat.

Voie 1, la règle du quotient avec $u = 300 + 8q + 0,2q^2$ et $v = q$:

$$CM'(q) = \frac{(8 + 0,4q)q - (300 + 8q + 0,2q^2)}{q^2} = \frac{0,2q^2 - 300}{q^2}$$

Le coût moyen, seconde voie

En simplifiant d'abord : $CM(q) = 300q^{-1} + 8 + 0,2q$, donc

$$CM'(q) = -300q^{-2} + 0,2 = 0,2 - \frac{300}{q^2}$$

La leçon de méthode

Les deux expressions sont identiques. La seconde est obtenue en trois fois moins de temps.

Simplifiez toujours l'écriture avant de dériver. La règle du quotient est un dernier recours, pas un réflexe.

Règle de la chaîne

Si $f(x) = u(v(x))$, alors

$$f'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$$

Deux engrenages

Une fonction composée est un empilement : on calcule d'abord v , puis on lui applique u .

Si v va deux fois plus vite et u trois fois plus vite, l'ensemble va six fois plus vite. Les vitesses se **multiplient**. D'où le produit dans la formule.

Les trois cas utiles en gestion

$f(x)$	$f'(x)$
$e^{u(x)}$	$u'(x) e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$(u(x))^n$	$n u'(x) (u(x))^{n-1}$

Trois dérivées

1. $K(t) = 1000 e^{0,05t}$: ici $u(t) = 0,05t$, donc $u'(t) = 0,05$ et

$$K'(t) = 1000 \times 0,05 \times e^{0,05t} = 50 e^{0,05t}$$

2. $f(x) = \ln(3x + 2)$:

$$f'(x) = \frac{3}{3x + 2}$$

3. $f(x) = (2x - 5)^4$:

$$f'(x) = 4 \times 2 \times (2x - 5)^3 = 8(2x - 5)^3$$

Ce que dit le premier

$K'(t) = 0,05 \times K(t)$: les intérêts produits à chaque instant sont proportionnels au capital.

C'est la définition même de la capitalisation continue — et on la retrouve par simple dérivation.

S'organiser

Avant de dériver, toujours

1. **Simplifier** l'écriture : développer, réduire, transformer les racines et les quotients en puissances.
2. **Reconnaître** la structure : somme ? produit ? quotient ? composée ?
3. **Appliquer** la règle correspondante, terme par terme.

Les trois erreurs qui reviennent chaque année

1. Dériver un produit comme $u'v'$ au lieu de $u'v + uv'$.
2. Oublier le facteur v' dans une composée : $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, pas e^{3x} .
3. Écrire v au lieu de v^2 au dénominateur du quotient.

Un exercice complet

Dériver le profit avec prix variable

$$\Pi(q) = \underbrace{q(50 - 0,1q)}_{\text{recette}} - \underbrace{(300 + 8q + 0,2q^2)}_{\text{coût}}$$

Étape 1 — simplifier :

$$\Pi(q) = 50q - 0,1q^2 - 300 - 8q - 0,2q^2 = -0,3q^2 + 42q - 300$$

Étape 2 — reconnaître : une somme de trois termes simples. Aucune règle compliquée n'est nécessaire.

Étape 3 — dériver :

$$\Pi'(q) = -0,6q + 42$$

Ce que le résultat annonce

$\Pi'(q) = 0$ donne $q = 70$. C'est la quantité qui maximise le profit — mais il reste à justifier que c'est bien un maximum.

Ce sera l'objet du chapitre 4.

Ce qu'il faut retenir

Quatre points

1. La règle de la puissance $x^n \rightarrow nx^{n-1}$ couvre presque tout.
2. Quatre règles : somme, produit, quotient, composée.
3. **Simplifier avant de dériver** fait gagner plus de temps que toutes les astuces réunies.
4. Une constante additive disparaît : les charges fixes n'entrent pas dans le calcul marginal.

La suite

Vous savez maintenant produire la fonction f' . Le chapitre 4 montre ce qu'on en fait : lire les variations et localiser les extremums.