Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 16 \\ 1 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

SÉRIE 9

SÉRIE D'EXERCICES CORRIGÉS

Les systèmes particuliers

Systèmes de Cramer, inversion matricielle et systèmes homogènes

OBJECTIF

Reconnaître un système de Cramer, le résoudre par la méthode de Cramer ou par l'inversion matricielle, et savoir résoudre un système homogène.

20 exercices progressifs | Corrigés détaillés pas à pas | Applications à la gestion

AU SOMMAIRE

Partie 1 **Énoncés** rappels du cours et 20 exercices

Partie 2 **Corrigés détaillés** Cramer, inversion matricielle, systèmes homogènes

Bilan **Ce qu'il faut retenir** et récapitulatif des résultats

Partie 3 **MATLAB** quand les calculs se compliquent

MODULE	PROFESSEUR	ANNÉE UNIVERSITAIRE
Mathématiques pour la gestion	**Jaouad Madkour**	**2026–2027**

Partie 1 : Énoncés

▶ Rappels du cours

Les séries 5 à 8 ont présenté la méthode générale de résolution d'un système linéaire : algorithme de Gauss, théorème de Rouché-Fontené, puis Gauss-Jordan. Certains systèmes ont une forme particulière qui permet d'aller plus vite : c'est l'objet de cette série.

Système de Cramer

Un système linéaire $AX = B$ est un **système de Cramer** lorsque :

— il a **autant d'équations que d'inconnues** (la matrice A est carrée) ;

— et le **déterminant** de A n'est pas nul : $\det(A) \neq 0$.

Un système de Cramer admet toujours une **solution unique**.

La méthode de Cramer

On note A_x la matrice obtenue en remplaçant, dans A, la colonne de x par la colonne B des seconds membres ; de même pour A_y et A_z. La solution est alors :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}, \qquad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}, \qquad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}.$$

Exemple. Pour $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ x + 4y = 12 \end{cases}$, on a $\det(A) = 3 \times 4 - 2 \times 1 = 10$, et

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = 40, \qquad \det(A_y) = \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 20, \qquad x = \frac{40}{10} = 4, \quad y = \frac{20}{10} = 2.$$

Résolution par inversion matricielle

Si $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible (série 4). En multipliant à gauche les deux membres de $AX = B$ par A^{-1}, on obtient :

$$X = A^{-1}B.$$

On calcule A^{-1} par la méthode des cofacteurs, on vérifie que $A \times A^{-1} = I_n$, puis on calcule le produit $A^{-1}B$ par la disposition de Falk. Lorsque plusieurs systèmes ont la **même matrice** A, l'inverse n'est calculée qu'une seule fois.

Système homogène

Un système est **homogène** lorsque tous ses seconds membres sont nuls : $AX = 0$.

— Il admet toujours la **solution nulle** ($x = y = z = 0$) : il est toujours compatible.

— Si $\det(A) \neq 0$, c'est un système de Cramer : la solution nulle est la **seule** solution.

— Si $\det(A) = 0$, il admet une **infinité de solutions**, que l'on trouve par la méthode de Gauss-Jordan (descente, puis remontée, puis retour au système).

Consigne commune

Pour chaque exercice, commencer par écrire le système sous la forme $AX = B$ et calculer $\det(A)$: c'est ce déterminant qui indique la méthode à suivre. Détailler ensuite chaque calcul et vérifier le résultat.

▶ Les exercices

Exercice 1 : Reconnaître un système de Cramer (ordre 2)

Parmi les systèmes suivants, lesquels sont des systèmes de Cramer ? Justifier.

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_b : \begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_c : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

corrigé p. 9 →

Exercice 2 : Reconnaître un système de Cramer (ordre 3)

Les systèmes suivants sont-ils des systèmes de Cramer ?

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_b : \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{cases}$$

corrigé p. 10 →

Exercice 3 : Méthode de Cramer, ordre 2

Montrer que le système suivant est un système de Cramer, puis le résoudre par la méthode de Cramer.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ x + 4y = 12 \end{cases}$$

corrigé p. 11 →

Exercice 4 : Méthode de Cramer, ordre 2, solution fractionnaire

Montrer que le système suivant est un système de Cramer, puis le résoudre par la méthode de Cramer.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$$

corrigé p. 13 →

Exercice 5 : Méthode de Cramer, ordre 3

Montrer que le système suivant est un système de Cramer, puis le résoudre par la méthode de Cramer.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

corrigé p. 15 →

Exercice 6 : Méthode de Cramer, ordre 3, coefficients négatifs

Montrer que le système suivant est un système de Cramer, puis le résoudre par la méthode de Cramer.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -1 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$$

corrigé p. 18 →

Exercice 7 : Méthode de Cramer, ordre 3, avec des zéros

Montrer que le système suivant est un système de Cramer, puis le résoudre par la méthode de Cramer ; calculer les déterminants en développant selon la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 4x + 2z = 10 \\ 2x + 3y = 8 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

corrigé p. 20 →

Exercice 8 : Inversion matricielle, ordre 2

Écrire le système sous la forme $AX = B$, calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs, vérifier que $A \times A^{-1} = I_2$, puis résoudre le système en calculant $X = A^{-1}B$.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

corrigé p. 26 →

Exercice 9 : Inversion matricielle, ordre 2, avec une division

Écrire le système sous la forme $AX = B$, calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs, vérifier que $A \times A^{-1} = I_2$, puis résoudre le système en calculant $X = A^{-1}B$.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

corrigé p. 28 →

Exercice 10 : Inversion matricielle, ordre 3

Écrire le système sous la forme $AX = B$, calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs, vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$, puis résoudre le système en calculant $X = A^{-1}B$.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x + 3y + z = 10 \\ x + 2y + 2z = 11 \end{cases}$$

corrigé p. 30 →

Exercice 11 : Inversion matricielle, ordre 3, avec des zéros

Écrire le système sous la forme $AX = B$, calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs, vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$, puis résoudre le système en calculant $X = A^{-1}B$.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x - 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - 3z = 5 \end{cases}$$

corrigé p. 34 →

Exercice 12 : Un même système, deux méthodes

Résoudre le système suivant par la méthode de Cramer, puis par l'inversion matricielle. Comparer les deux méthodes.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x + 3y + 6z = 25 \end{cases}$$

corrigé p. 37 →

Exercice 13 : Plusieurs systèmes de même matrice

L'atelier de confection **Nour** (Tétouan) fabrique des chemises (x), des pantalons (y) et des vestes (z). Chaque article passe par la coupe, la couture et la finition. Les temps unitaires (en heures) et les heures disponibles en janvier, février et mars sont donnés ci-dessous.

	Chemise	Pantalon	Veste	Janvier	Février	Mars
Coupe	2	1	1	70	60	75
Couture	1	1	0	30	25	45
Finition	1	1	1	60	45	55

Combien d'articles de chaque type l'atelier doit-il fabriquer chaque mois pour utiliser toutes les heures disponibles ?

1) Écrire les trois systèmes sous la forme $AX = B_1$, $AX = B_2$, $AX = B_3$.

2) Calculer A^{-1} et vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$.

3) Résoudre les trois systèmes en un seul produit matriciel et interpréter.

corrigé p. 43 →

Exercice 14 : Système homogène d'ordre 2

Résoudre le système homogène suivant.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

corrigé p. 46 →

Exercice 15 : Système homogène d'ordre 3, déterminant non nul

Résoudre le système homogène suivant.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

corrigé p. 47 →

Exercice 16 : Système homogène, déterminant nul

1) Montrer que le système homogène suivant n'est pas un système de Cramer.

2) Le résoudre par la méthode de Gauss-Jordan.

$$\mathcal{S}_{16} : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$$

corrigé p. 48 →

Exercice 17 : Système homogène avec un paramètre

Soit le système homogène suivant, où m est un nombre réel :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + my + 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

1) Calculer $\det(A)$ en fonction de m.
2) Pour quelles valeurs de m la solution nulle est-elle la seule solution ?
3) Résoudre le système pour $m = 3$.

corrigé p. 53 →

Exercice 18 : Application : utiliser tous les stocks

La pâtisserie **Dar Halwa** (Tanger) prépare trois spécialités par fournées : des cornes de gazelle (x fournées), des chebakia (y) et des ghriba (z). Les quantités d'ingrédients nécessaires par fournée et les stocks disponibles pour la semaine sont les suivants.

	Cornes de gazelle	Chebakia	Ghriba	Stock (kg)
Farine (kg)	2	1	1	80
Amandes (kg)	1	2	1	90
Miel (kg)	1	1	2	70

1) Écrire le système qui traduit l'utilisation complète des stocks.
2) Montrer que c'est un système de Cramer et le résoudre par la méthode de Cramer.
3) Interpréter.

corrigé p. 57 →

Exercice 19 : Application : retrouver des prix unitaires

Un grossiste du marché de gros de Tanger vend trois produits : de l'huile (x, prix du bidon en dirhams), du thé (y, prix du paquet) et du sucre (z, prix du pain de sucre). Trois clients ont reçu les factures suivantes.

	Huile	Thé	Sucre	Montant (DH)
Client 1	2	1	3	80
Client 2	1	2	1	65
Client 3	3	1	2	85

1) Écrire le système qui permet de retrouver les prix unitaires, sous la forme $AX = B$.
2) Calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs et vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$.
3) En déduire les prix unitaires.

corrigé p. 60 →

Exercice 20 : Application : l'équilibre des échanges

Dans la médina, trois artisans échangent leurs productions : un tisserand, un potier et un menuisier. On note x, y et z leurs revenus annuels (en milliers de dirhams). Le tableau indique quelle part de la production de chacun (en colonne) est achetée par chaque artisan (en ligne).

	Tisserand	Potier	Menuisier
achetée par le tisserand	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
achetée par le potier	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
achetée par le menuisier	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Les échanges sont équilibrés lorsque les dépenses de chaque artisan sont égales à son revenu.
1) Montrer que l'équilibre se traduit par un système homogène, que l'on écrira avec des coefficients entiers.
2) Ce système est-il de Cramer ?
3) Le résoudre par la méthode de Gauss-Jordan et déterminer les revenus d'équilibre lorsque le revenu du menuisier est de 30 milliers de dirhams.

corrigé p. 64 →

Partie 2 : Corrigés détaillés

Conventions de lecture

— Méthode de Cramer : dans A_x, A_y et A_z, la colonne remplacée par B est écrite en couleur (16).

— Disposition de Falk : la matrice de gauche est en bas à gauche, celle de droite en haut à droite, et le produit au croisement de leurs lignes et colonnes prolongées.

— Gauss-Jordan : les lignes sont notées L_1, L_2, L_3 selon leur position dans la matrice *actuelle* ; au-dessus de chaque flèche figure la transformation, en dessous le code de l'opération (O_1, O_2 ou O_3). Le pivot en cours est encadré en bleu (1) et le nombre à annuler entouré en orange (−2).

Corrigé de l'exercice 1

reconnaître

Système $\mathcal{S}_a$.

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Deux équations, deux inconnues : A est carrée d'ordre 2.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 1 = -2 - 3 = -5$$

$\det(A) = -5 \neq 0$: $\mathcal{S}_a$ est un **système de Cramer**, il admet une solution unique.

Système $\mathcal{S}_b$.

$$\mathcal{S}_b : \begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

Deux équations, deux inconnues : A est carrée d'ordre 2.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (-4) \times (-1) = 4 - 4 = 0$$

$\det(A) = 0$: $\mathcal{S}_b$ **n'est pas** un système de Cramer. (La première équation est égale à -2 fois la deuxième pour les coefficients, mais pas pour les seconds membres : $-2 \times 1 = -2 \neq 6$.)

Système $\mathcal{S}_c$.

$$\mathcal{S}_c : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

Deux équations et trois inconnues : la matrice A est de taille 2×3, elle **n'est pas carrée**. Son déterminant n'existe pas : $\mathcal{S}_c$ **n'est pas** un système de Cramer.

Seul $\mathcal{S}_a$ est un système de Cramer. Pour $\mathcal{S}_b$ et $\mathcal{S}_c$, il faut revenir à la méthode générale : algorithme de Gauss, puis théorème de Rouché-Fontené (séries 5 à 8).

Remarque

Un système de Cramer doit réunir **deux conditions** : autant d'équations que d'inconnues (matrice carrée), **et** un déterminant non nul. Il ne suffit pas que le système soit carré.

Corrigé de l'exercice 2

reconnaître

Système $\mathcal{S}_a$.

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Trois équations, trois inconnues : A est carrée d'ordre 3. On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 1 + (-1) \times 2 \times 1 = 1 + 2 - 2 = \mathbf{1}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } (-1) \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 = -1 + 1 + 4 = \mathbf{4}$$

$$\det(A) = \mathbf{1} - \mathbf{4} = -3$$

$\det(A) = -3 \neq 0$: $\mathcal{S}_a$ est un **système de Cramer**.

Système $\mathcal{S}_b$.

$$\mathcal{S}_b : \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{cases}$$

Trois équations, trois inconnues : A est carrée d'ordre 3. On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 1 \times (-1) \times 4 + 2 \times 3 \times 3 + 1 \times 2 \times 1 = -4 + 18 + 2 = \mathbf{16}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } 1 \times (-1) \times 3 + 1 \times 3 \times 1 + 2 \times 2 \times 4 = -3 + 3 + 16 = \mathbf{16}$$

$$\det(A) = \mathbf{16} - \mathbf{16} = 0$$

$\det(A) = 0$: $\mathcal{S}_b$ **n'est pas** un système de Cramer. On remarque que la ligne 3 de A est la somme des lignes 1 et 2 : c'est la raison pour laquelle le déterminant est nul.

$\mathcal{S}_a$ est un système de Cramer (solution unique) ; $\mathcal{S}_b$ n'en est pas un.

Remarque

Pour savoir si un système est de Cramer, il n'est pas nécessaire de le résoudre : le seul calcul de $\det(A)$ suffit. Les seconds membres n'interviennent pas.

Corrigé de l'exercice 3

Cramer, ordre 2

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ x + 4y = 12 \end{cases}$$

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}}_{B}$$

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

Le système compte 2 équations et 2 inconnues : la matrice A est carrée d'ordre 2. On calcule son déterminant :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 1 = 12 - 2 = 10$$

$\det(A) = 10 \neq 0$: le système est un **système de Cramer**, il admet une **solution unique**.

Étape 3 Les déterminants $\det(A_x)$, $\det(A_y)$

Pour chaque inconnue, on remplace dans A la colonne de cette inconnue par la colonne B des seconds membres (en couleur), puis on calcule le déterminant de la matrice obtenue.

Matrice A_x : la colonne 1 (celle de x) est remplacée par B.

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = 16 \times 4 - 2 \times 12 = 64 - 24 = 40$$

Matrice A_y : la colonne 2 (celle de y) est remplacée par B.

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 3 \times 12 - 16 \times 1 = 36 - 16 = 20$$

Étape 4 Les formules de Cramer

Chaque inconnue est le quotient du déterminant de sa matrice par $\det(A)$:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{40}{10} = \mathbf{4}$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{20}{10} = \mathbf{2}$$

Étape 5 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système :

$$\text{équation } 1 : 3 \times 4 + 2 \times 2 = 12 + 4 = 16 \checkmark$$
$$\text{équation } 2 : 1 \times 4 + 4 \times 2 = 4 + 8 = 12 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système admet une solution unique : $x = 4$, $y = 2$, soit $\mathbb{S} = \{(4, 2)\}$.

Corrigé de l'exercice 4

Cramer, ordre 2

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$$

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

Le système compte 2 équations et 2 inconnues : la matrice A est carrée d'ordre 2. On calcule son déterminant :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 4 = -2 - 12 = -14$$

$\det(A) = -14 \neq 0$: le système est un **système de Cramer**, il admet une **solution unique**.

Étape 3 Les déterminants $\det(A_x)$, $\det(A_y)$

Pour chaque inconnue, on remplace dans A la colonne de cette inconnue par la colonne B des seconds membres (en couleur), puis on calcule le déterminant de la matrice obtenue.

Matrice A_x : la colonne 1 (celle de x) est remplacée par B.

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 3 = -1 - 9 = -10$$

Matrice A_y : la colonne 2 (celle de y) est remplacée par B.

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 6 - 4 = 2$$

Étape 4 Les formules de Cramer

Chaque inconnue est le quotient du déterminant de sa matrice par $\det(A)$:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-10}{-14} = \frac{5}{7}$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7}$$

Étape 5 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système :

$$\text{équation 1} : 2 \times \tfrac{5}{7} + 3 \times (-\tfrac{1}{7}) = \tfrac{10}{7} - \tfrac{3}{7} = 1 \checkmark$$
$$\text{équation 2} : 4 \times \tfrac{5}{7} + (-1) \times (-\tfrac{1}{7}) = \tfrac{20}{7} + \tfrac{1}{7} = 3 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système admet une solution unique : $x = \frac{5}{7}$, $y = -\frac{1}{7}$, soit $\mathrm{S} = \{(\frac{5}{7}, -\frac{1}{7})\}$.

Remarque

La méthode de Cramer s'applique aussi lorsque la solution n'est pas entière : les fractions n'apparaissent qu'à la toute dernière étape, dans les quotients.

Corrigé de l'exercice 5 — Cramer, ordre 3

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

Le système compte 3 équations et 3 inconnues : la matrice A est carrée d'ordre 3. On calcule son déterminant : Par la règle de Sarrus (produits des diagonales descendantes moins produits des diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 1\times(-1)\times(-1)+1\times1\times1+1\times2\times2 = 1+1+4 = \mathbf{6}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } 1\times(-1)\times1+1\times1\times2+1\times2\times(-1) = -1+2-2 = \mathbf{-1}$$

$$\det(A) = \mathbf{6} - \mathbf{(-1)} \;=\; 7$$

$\det(A) = 7 \neq 0$: le système est un **système de Cramer**, il admet une **solution unique**.

Étape 3 Les déterminants $\det(A_x)$, $\det(A_y)$, $\det(A_z)$

Pour chaque inconnue, on remplace dans A la colonne de cette inconnue par la colonne B des seconds membres (en couleur), puis on calcule le déterminant de la matrice obtenue.

Matrice A_x : la colonne 1 (celle de x) est remplacée par B.

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 6\times(-1)\times(-1)+1\times1\times2+1\times3\times2 = 6+2+6 = \mathbf{14}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } 1\times(-1)\times2+6\times1\times2+1\times3\times(-1) = -2+12-3 = \mathbf{7}$$

$$\det(A_x) = \mathbf{14} - \mathbf{7} \;=\; 7$$

Matrice A_y : la colonne 2 (celle de y) est remplacée par B.

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 1\times3\times(-1)+6\times1\times1+1\times2\times2 = -3+6+4 = \mathbf{7}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } 1\times3\times1+1\times1\times2+6\times2\times(-1) = 3+2-12 = \mathbf{-7}$$

$$\det(A_y) = \mathbf{7} - \mathbf{(-7)} \;=\; 14$$

Matrice A_z : la colonne 3 (celle de z) est remplacée par B.

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 1\times(-1)\times 2 + 1\times 3\times 1 + 6\times 2\times 2 = -2+3+24 = 25$$
$$\text{diagonales ascendantes : } 6\times(-1)\times 1 + 1\times 3\times 2 + 1\times 2\times 2 = -6+6+4 = 4$$

$$\det(A_z) = 25 - 4 \;=\; 21$$

Étape 4 Les formules de Cramer

Chaque inconnue est le quotient du déterminant de sa matrice par $\det(A)$:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{7}{7} = \mathbf{1}$$
$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{14}{7} = \mathbf{2}$$
$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{21}{7} = \mathbf{3}$$

Étape 5 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système :

$$\text{équation 1 : } 1\times 1 + 1\times 2 + 1\times 3 = 1+2+3 = 6 \;\checkmark$$
$$\text{équation 2 : } 2\times 1 + (-1)\times 2 + 1\times 3 = 2-2+3 = 3 \;\checkmark$$
$$\text{équation 3 : } 1\times 1 + 2\times 2 + (-1)\times 3 = 1+4-3 = 2 \;\checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système admet une solution unique : $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, soit $\mathrm{S} = \{(1,2,3)\}$.

Corrigé de l'exercice 6 — Cramer, ordre 3

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -1 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$$

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

Le système compte 3 équations et 3 inconnues : la matrice A est carrée d'ordre 3. On calcule son déterminant : Par la règle de Sarrus (produits des diagonales descendantes moins produits des diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 2 \times 2 \times 1 + (-1) \times (-1) \times 3 + 3 \times 1 \times 1 = 4 + 3 + 3 = \mathbf{10}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } 3 \times 2 \times 3 + 2 \times (-1) \times 1 + (-1) \times 1 \times 1 = 18 - 2 - 1 = \mathbf{15}$$

$$\det(A) = \mathbf{10} - \mathbf{15} = -5$$

$\det(A) = -5 \neq 0$: le système est un **système de Cramer**, il admet une **solution unique**.

Étape 3 Les déterminants $\det(A_x)$, $\det(A_y)$, $\det(A_z)$

Pour chaque inconnue, on remplace dans A la colonne de cette inconnue par la colonne B des seconds membres (en couleur), puis on calcule le déterminant de la matrice obtenue.

Matrice A_x : la colonne 1 (celle de x) est remplacée par B.

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

diagonales descendantes : $8 \times 2 \times 1 + (-1) \times (-1) \times 6 + 3 \times (-1) \times 1 = 16 + 6 - 3 = \mathbf{19}$
diagonales ascendantes : $3 \times 2 \times 6 + 8 \times (-1) \times 1 + (-1) \times (-1) \times 1 = 36 - 8 + 1 = \mathbf{29}$

$$\det(A_x) = \mathbf{19} - \mathbf{29} = -10$$

Matrice A_y : la colonne 2 (celle de y) est remplacée par B.

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

diagonales descendantes : $2 \times (-1) \times 1 + 8 \times (-1) \times 3 + 3 \times 1 \times 6 = -2 - 24 + 18 = \mathbf{-8}$
diagonales ascendantes : $3 \times (-1) \times 3 + 2 \times (-1) \times 6 + 8 \times 1 \times 1 = -9 - 12 + 8 = \mathbf{-13}$

$$\det(A_y) = \mathbf{-8} - (\mathbf{-13}) = 5$$

Matrice A_z : la colonne 3 (celle de z) est remplacée par B.

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

diagonales descendantes : $2 \times 2 \times 6 + (-1) \times (-1) \times 3 + 8 \times 1 \times 1 = 24 + 3 + 8 = \mathbf{35}$
diagonales ascendantes : $8 \times 2 \times 3 + 2 \times (-1) \times 1 + (-1) \times 1 \times 6 = 48 - 2 - 6 = \mathbf{40}$

$$\det(A_z) = \mathbf{35} - \mathbf{40} = -5$$

Étape 4 Les formules de Cramer

Chaque inconnue est le quotient du déterminant de sa matrice par $\det(A)$:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-10}{-5} = \mathbf{2}$$
$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{5}{-5} = \mathbf{-1}$$
$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-5}{-5} = \mathbf{1}$$

Étape 5 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système :

$$\text{équation } 1 : 2\times 2 + (-1)\times(-1) + 3\times 1 = 4+1+3 = 8 \checkmark$$
$$\text{équation } 2 : 1\times 2 + 2\times(-1) + (-1)\times 1 = 2-2-1 = -1 \checkmark$$
$$\text{équation } 3 : 3\times 2 + 1\times(-1) + 1\times 1 = 6-1+1 = 6 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système admet une solution unique : $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$, soit $\mathbb{S} = \{(2,-1,1)\}$.

Remarque

Pour un système d'ordre 3, la méthode de Cramer demande **quatre déterminants** d'ordre 3. Les parenthèses autour des nombres négatifs évitent la plupart des erreurs de signe.

Corrigé de l'exercice 7 — Cramer, ordre 3

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 4x + 2z = 10 \\ 2x + 3y = 8 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 1 ; z n'apparaît pas dans l'équation 2 ; x n'apparaît pas dans l'équation 3 : les coefficients correspondants valent 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

Le système compte 3 équations et 3 inconnues : la matrice A est carrée d'ordre 3. On calcule son déterminant : **Choix stratégique.** On cherche la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros : la ligne 1 en contient 1, c'est le maximum.

On met en évidence la ligne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté a_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans A ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & 0 & 2 \end{matrix}} \\ 2 \quad 3 \quad 0 \\ 0 \quad 2 \quad -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} = 4 &\longrightarrow c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(A_{11}) \\ a_{12} = 0 &\longrightarrow c_{12} : \text{inutile à calculer} \\ a_{13} = 2 &\longrightarrow c_{13} = (-1)^{1+3} \times \det(A_{13}) \end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(A) = a_{11}\, c_{11} + a_{12}\, c_{12} \; + \; a_{13}\, c_{13}$$

Comme $a_{12} = 0$, le produit $a_{12}\, c_{12}$ est nul **quelle que soit la valeur du cofacteur** c_{12} : il est inutile de le calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det(A) = a_{11}\, c_{11} + a_{13}\, c_{13}$$

Cofacteur c_{11} (associé à $a_{11} = 4$). On supprime la ligne 1 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{11}) = 3 \times (-1) - 0 \times 2 = -3 - 0 \; = \; -3$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times (-3) = 1 \times (-3) = -3 \qquad \Longrightarrow \qquad a_{11}\, c_{11} = 4 \times (-3) \; = \; -12$$

Cofacteur c_{13} (associé à $a_{13} = 2$). On supprime la ligne 1 et la colonne 3 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{13}) = 2 \times 2 - 3 \times 0 = 4 - 0 \;=\; 4$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \times 4 = 1 \times 4 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad a_{13}\, c_{13} = 2 \times 4 \;=\; 8$$

On additionne les produits :

$$\det(A) = -12 + 8 \;=\; \boxed{-4}$$

$\det(A) = -4 \neq 0$: le système est un **système de Cramer**, il admet une **solution unique**.

Étape 3 Les déterminants $\det(A_x)$, $\det(A_y)$, $\det(A_z)$

Pour chaque inconnue, on remplace dans A la colonne de cette inconnue par la colonne B des seconds membres (en couleur), puis on calcule le déterminant de la matrice obtenue.

Matrice A_x : la colonne 1 (celle de x) est remplacée par B.

$$A_x = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Choix stratégique. On cherche la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros : la ligne 1 en contient 1, c'est le maximum.

On met en évidence la ligne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté $(a_x)_{ij}$, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans (A_x) ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 10 & 0 & 2 \end{matrix}} \\ 8 \quad 3 \quad 0 \\ 1 \quad 2 \quad -1 \end{pmatrix}$$

$$(a_x)_{11} = 10 \;\longrightarrow\; c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det((A_x)_{11})$$

$$(a_x)_{12} = 0 \;\longrightarrow\; c_{12} \text{ : inutile à calculer}$$

$$(a_x)_{13} = 2 \;\longrightarrow\; c_{13} = (-1)^{1+3} \times \det((A_x)_{13})$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det((A_x)) = (a_x)_{11}\, c_{11} + (a_x)_{12}\, c_{12} \;+\; (a_x)_{13}\, c_{13}$$

Comme $(a_x)_{12} = 0$, le produit $(a_x)_{12}\, c_{12}$ est nul **quelle que soit la valeur du cofacteur** c_{12} : il est inutile de le calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det((A_x)) = (a_x)_{11}\, c_{11} + (a_x)_{13}\, c_{13}$$

Cofacteur c_{11} (associé à $(a_x)_{11} = 10$). On supprime la ligne 1 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A_x)_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det((A_x)_{11}) = 3 \times (-1) - 0 \times 2 = -3 - 0 \;=\; -3$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times (-3) = 1 \times (-3) = -3 \qquad \Longrightarrow \qquad (a_x)_{11}\, c_{11} = 10 \times (-3) \;=\; -30$$

Cofacteur c_{13} (associé à $(a_x)_{13} = 2$). On supprime la ligne 1 et la colonne 3 :

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A_x)_{13} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det((A_x)_{13}) = 8 \times 2 - 3 \times 1 = 16 - 3 \;=\; 13$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \times 13 = 1 \times 13 = 13 \qquad \Longrightarrow \qquad (a_x)_{13}\, c_{13} = 2 \times 13 \;=\; 26$$

On additionne les produits :

$$\det((A_x)) = -30 + 26 \;=\; \boxed{-4}$$

Matrice A_y : la colonne 2 (celle de y) est remplacée par B.

$$A_y = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Choix stratégique. On cherche la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros : la colonne 1 en contient 1, c'est le maximum.

On met en évidence la colonne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté $(a_y)_{ij}$, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans (A_y) ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 10 & 2 \\ \boxed{2} & 8 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(a_y)_{11} = 4 \;\longrightarrow\; c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det((A_y)_{11})$$
$$(a_y)_{21} = 2 \;\longrightarrow\; c_{21} = (-1)^{2+1} \times \det((A_y)_{21})$$
$$(a_y)_{31} = 0 \;\longrightarrow\; c_{31} \text{ : inutile à calculer}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det((A_y)) = (a_y)_{11}\, c_{11} + (a_y)_{21}\, c_{21} \;+\; (a_y)_{31}\, c_{31}$$

Comme $(a_y)_{31} = 0$, le produit $(a_y)_{31}\, c_{31}$ est nul **quelle que soit la valeur du cofacteur** c_{31} : il est inutile de le calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det((A_y)) = (a_y)_{11}\, c_{11} + (a_y)_{21}\, c_{21}$$

Cofacteur c_{11} (associé à $(a_y)_{11} = 4$). On supprime la ligne 1 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A_y)_{11} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det((A_y)_{11}) = 8 \times (-1) - 0 \times 1 = -8 - 0 \;=\; -8$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times (-8) = 1 \times (-8) = -8 \quad \Longrightarrow \quad (a_y)_{11}\, c_{11} = 4 \times (-8) \;=\; -32$$

Cofacteur c_{21} (associé à $(a_y)_{21} = 2$). On supprime la ligne 2 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A_y)_{21} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det((A_y)_{21}) = 10 \times (-1) - 2 \times 1 = -10 - 2 \;=\; -12$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \times (-12) = (-1) \times (-12) = 12 \quad \Longrightarrow \quad (a_y)_{21}\, c_{21} = 2 \times 12 \;=\; 24$$

On additionne les produits :

$$\det((A_y)) = -32 + 24 \;=\; \boxed{-8}$$

Matrice A_z : la colonne 3 (celle de z) est remplacée par B.

$$A_z = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Choix stratégique. On cherche la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros : la ligne 1 en contient 1, c'est le maximum.

On met en évidence la ligne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté $(a_z)_{ij}$, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans (A_z) ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & 0 & 10 \end{matrix}} \\ 2 \quad 3 \quad 8 \\ 0 \quad 2 \quad 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (a_z)_{11} = 4 \quad &\longrightarrow \quad c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det((A_z)_{11}) \\ (a_z)_{12} = 0 \quad &\longrightarrow \quad c_{12} : \text{inutile à calculer} \\ (a_z)_{13} = 10 \quad &\longrightarrow \quad c_{13} = (-1)^{1+3} \times \det((A_z)_{13}) \end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det((A_z)) = (a_z)_{11}\, c_{11} + (a_z)_{12}\, c_{12} \;+\; (a_z)_{13}\, c_{13}$$

Comme $(a_z)_{12} = 0$, le produit $(a_z)_{12}\, c_{12}$ est nul **quelle que soit la valeur du cofacteur** c_{12} : il est inutile de le calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det((A_z)) = (a_z)_{11}\, c_{11} + (a_z)_{13}\, c_{13}$$

Cofacteur c_{11} (associé à $(a_z)_{11} = 4$). On supprime la ligne 1 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A_z)_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det((A_z)_{11}) = 3 \times 1 - 8 \times 2 = 3 - 16 \;=\; -13$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times (-13) = 1 \times (-13) = -13 \quad \Longrightarrow \quad (a_z)_{11}\, c_{11} = 4 \times (-13) \;=\; -52$$

Cofacteur c_{13} (associé à $(a_z)_{13} = 10$). On supprime la ligne 1 et la colonne 3 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A_z)_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det((A_z)_{13}) = 2 \times 2 - 3 \times 0 = 4 - 0 \;=\; 4$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \times 4 = 1 \times 4 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad (a_z)_{13}\, c_{13} = 10 \times 4 \;=\; 40$$

On additionne les produits :

$$\det((A_z)) = -52 + 40 \;=\; \boxed{-12}$$

Étape 4 Les formules de Cramer

Chaque inconnue est le quotient du déterminant de sa matrice par $\det(A)$:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-4}{-4} = \mathbf{1}$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-8}{-4} = \mathbf{2}$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-12}{-4} = \mathbf{3}$$

Étape 5 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système :

$$\text{équation 1} : 4 \times 1 + 2 \times 3 = 4 + 6 = 10 \;\checkmark$$
$$\text{équation 2} : 2 \times 1 + 3 \times 2 = 2 + 6 = 8 \;\checkmark$$
$$\text{équation 3} : 2 \times 2 + (-1) \times 3 = 4 - 3 = 1 \;\checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système admet une solution unique : $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, soit $\mathrm{S} = \{(1,2,3)\}$.

Remarque

Lorsque la matrice contient des zéros, le développement selon la ligne ou la colonne qui en contient le plus est plus rapide que la règle de Sarrus : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur.

Corrigé de l'exercice 8

inversion, ordre 2

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B}$$

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 3 \times 3 = 8 - 9 = -1$$

$\det(A) = -1 \neq 0$: c'est un **système de Cramer**, et la matrice A est **inversible**.

Étape 3 Matrice des cofacteurs, matrice adjointe et inverse

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j : il ne reste qu'**un seul nombre**. Le déterminant d'une matrice qui ne contient qu'une ligne et une colonne est égal à ce nombre ; on applique ensuite le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$:

$c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(2) = +2 = 2$ (on supprime la ligne 1 et la colonne 1 : $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 \end{pmatrix}$)

$c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(3) = -3 = -3$ (on supprime la ligne 1 et la colonne 2 : $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot \end{pmatrix}$)

$c_{21} = (-1)^{2+1} \times \det(3) = -3 = -3$ (on supprime la ligne 2 et la colonne 1 : $\begin{pmatrix} \cdot & 3 \\ \cdot & 2 \end{pmatrix}$)

$c_{22} = (-1)^{2+2} \times \det(4) = +4 = 4$ (on supprime la ligne 2 et la colonne 2 : $\begin{pmatrix} 4 & \cdot \\ 3 & \cdot \end{pmatrix}$)

$$A^c = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

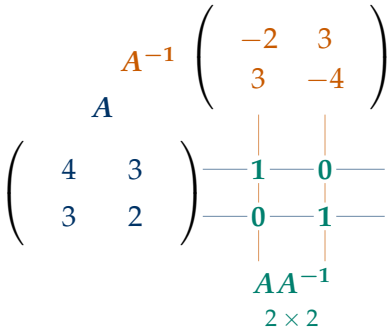
La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs (les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a), et l'inverse s'obtient en la divisant par $\det(A)$:

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Étape 4 Vérification : $A \times A^{-1} = I_2$

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :



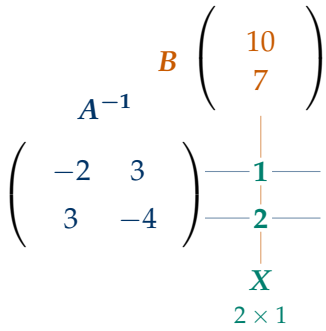
Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 4 \times (-2) + 3 \times 3 = -8 + 9 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 12 - 12 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = 3 \times (-2) + 2 \times 3 = -6 + 6 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 3 \times 3 + 2 \times (-4) = 9 - 8 = \mathbf{1}$$

On obtient bien la matrice identité I_2 : $A \times A^{-1} = I_2$.

Étape 5 Résolution : $X = A^{-1}B$

En multipliant à gauche les deux membres de $AX = B$ par A^{-1}, on obtient $A^{-1}AX = A^{-1}B$, c'est-à-dire $I_2X = A^{-1}B$, soit $X = A^{-1}B$. On calcule ce produit par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = (-2) \times 10 + 3 \times 7 = -20 + 21 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{21} = 3 \times 10 + (-4) \times 7 = 30 - 28 = \mathbf{2}$$

Le système admet une solution unique : $x = 1$, $y = 2$, soit $\mathbb{S} = \{(1, 2)\}$.

Corrigé de l'exercice 9

inversion, ordre 2

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}}_{B}$$

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times 4 = 6 - 4 = 2$$

$\det(A) = 2 \neq 0$: c'est un **système de Cramer**, et la matrice A est **inversible**.

Étape 3 Matrice des cofacteurs, matrice adjointe et inverse

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j : il ne reste qu'**un seul nombre**. Le déterminant d'une matrice qui ne contient qu'une ligne et une colonne est égal à ce nombre ; on applique ensuite le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$:

$c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(2) = +2 = 2$ (on supprime la ligne 1 et la colonne 1 : $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 \end{pmatrix}$)

$c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(4) = -4 = -4$ (on supprime la ligne 1 et la colonne 2 : $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot \end{pmatrix}$)

$c_{21} = (-1)^{2+1} \times \det(1) = -1 = -1$ (on supprime la ligne 2 et la colonne 1 : $\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$)

$c_{22} = (-1)^{2+2} \times \det(3) = +3 = 3$ (on supprime la ligne 2 et la colonne 2 : $\begin{pmatrix} 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$)

$$A^c = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

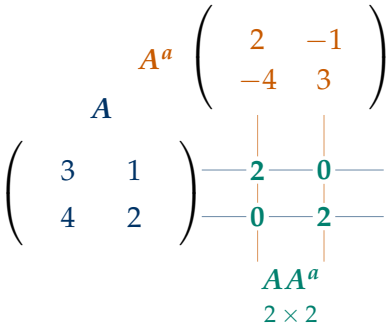
La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs (les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a), et l'inverse s'obtient en la divisant par $\det(A)$:

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Étape 4 Vérification : $A \times A^{-1} = I_2$

Pour éviter de calculer avec des fractions, on met le facteur $\frac{1}{2}$ en avant : $A \times A^{-1} = \frac{1}{2}(A \times A^a)$. On calcule d'abord $A \times A^a$ par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 3 \times 2 + 1 \times (-4) = 6 - 4 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{12} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = -3 + 3 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = 4 \times 2 + 2 \times (-4) = 8 - 8 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 4 \times (-1) + 2 \times 3 = -4 + 6 = \mathbf{2}$$

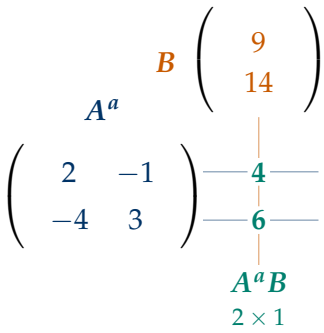
On obtient $A \times A^a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\,I_2$, d'où

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient bien la matrice identité I_2 : $A \times A^{-1} = I_2$.

Étape 5 Résolution : $X = A^{-1}B$

En multipliant à gauche les deux membres de $AX = B$ par A^{-1}, on obtient $A^{-1}AX = A^{-1}B$, c'est-à-dire $I_2X = A^{-1}B$, soit $X = A^{-1}B$. Comme $A^{-1} = \frac{1}{2}A^a$, on calcule d'abord A^aB par la disposition de Falk (avec des nombres entiers), puis on divise par 2 :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 2 \times 9 + (-1) \times 14 = 18 - 14 = \mathbf{4}$$
$$\pi_{21} = (-4) \times 9 + 3 \times 14 = -36 + 42 = \mathbf{6}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le système admet une solution unique : $x = 2$, $y = 3$, soit $\mathbb{S} = \{(2,3)\}$.

Remarque

Quand $\det(A) \neq \pm 1$, l'inverse contient des fractions. On garde alors le facteur $\frac{1}{\det(A)}$ devant la matrice adjointe et on ne divise qu'à la fin : on calcule avec des entiers.

Corrigé de l'exercice 10

inversion, ordre 3

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x + 3y + z = 10 \\ x + 2y + 2z = 11 \end{cases}$$

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}}_{B}$$

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = (6+2+2) - (3+2+4) = 10 - 9 \ = \ 1$$

$\det(A) = 1 \neq 0$: c'est un **système de Cramer**, et la matrice A est **inversible**.

Étape 3 Les neuf cofacteurs et la matrice des cofacteurs A^c

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j de A, on calcule le mineur obtenu, puis on applique le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = +(3\times 2 - 1\times 2) = +(6-2) = 4$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1\times 2 - 1\times 1) = -(2-1) = -1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(1\times 2 - 3\times 1) = +(2-3) = +(-1) = -1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2\times 2 - 1\times 2) = -(4-2) = -2$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(1\times 2 - 1\times 1) = +(2-1) = 1$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1\times 2 - 2\times 1) = -(2-2) = 0$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +(2\times 1 - 1\times 3) = +(2-3) = +(-1) = -1$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\left(1 \times 1 - 1 \times 1\right) = -\left(1 - 1\right) = 0$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +\left(1 \times 3 - 2 \times 1\right) = +\left(3 - 2\right) = 1$$

Contrôle. En développant selon la ligne 1, on retrouve le déterminant : $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 1 \times 4 + 2 \times (-1) + 1 \times (-1) = 1$.

On range chaque cofacteur à la place du coefficient correspondant :

$$A^c = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 4 Matrice adjointe A^a et matrice inverse A^{-1}

La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs : les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a.

$$A^a = \left(A^c\right)^\top = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 5 Vérification : $A \times A^{-1} = I_3$

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :

$$\begin{array}{cc} & A^{-1} \\ & \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ & AA^{-1} \\ & 3 \times 3 \end{array}$$

Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= 1 \times 4 + 2 \times (-1) + 1 \times (-1) = 4 - 2 - 1 = \mathbf{1} \\
\pi_{12} &= 1 \times (-2) + 2 \times 1 + 1 \times 0 = -2 + 2 + 0 = \mathbf{0} \\
\pi_{13} &= 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = \mathbf{0} \\
\pi_{21} &= 1 \times 4 + 3 \times (-1) + 1 \times (-1) = 4 - 3 - 1 = \mathbf{0} \\
\pi_{22} &= 1 \times (-2) + 3 \times 1 + 1 \times 0 = -2 + 3 + 0 = \mathbf{1} \\
\pi_{23} &= 1 \times (-1) + 3 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = \mathbf{0} \\
\pi_{31} &= 1 \times 4 + 2 \times (-1) + 2 \times (-1) = 4 - 2 - 2 = \mathbf{0} \\
\pi_{32} &= 1 \times (-2) + 2 \times 1 + 2 \times 0 = -2 + 2 + 0 = \mathbf{0} \\
\pi_{33} &= 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 2 \times 1 = -1 + 0 + 2 = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A \times A^{-1} = I_3$.

Étape 6 Résolution : $X = A^{-1}B$

En multipliant à gauche les deux membres de $AX = B$ par A^{-1}, on obtient $A^{-1}AX = A^{-1}B$, c'est-à-dire $I_3X = A^{-1}B$, soit $X = A^{-1}B$. On calcule ce produit par la disposition de Falk :

$$\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} \\ A^{-1} & \\ \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ & X \\ & 3 \times 1 \end{array}$$

Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= 4 \times 8 + (-2) \times 10 + (-1) \times 11 = 32 - 20 - 11 = \mathbf{1} \\
\pi_{21} &= (-1) \times 8 + 1 \times 10 + 0 \times 11 = -8 + 10 + 0 = \mathbf{2} \\
\pi_{31} &= (-1) \times 8 + 0 \times 10 + 1 \times 11 = -8 + 0 + 11 = \mathbf{3}
\end{aligned}$$

Le système admet une solution unique : $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, soit $\mathrm{S} = \{(1,2,3)\}$.

Corrigé de l'exercice 11

inversion, ordre 3

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x \quad\quad - 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 9 \\ 2x \quad\quad - 3z = 5 \end{cases}$$

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 1 ; y n'apparaît pas dans l'équation 3 : les coefficients correspondants valent 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B}$$

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = \big(-6+0+0\big) - \big(-8+0+0\big) = -6-(-8) \;=\; 2$$

$\det(A) = 2 \neq 0$: c'est un **système de Cramer**, et la matrice A est **inversible**.

Étape 3 Les neuf cofacteurs et la matrice des cofacteurs A^c

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j de A, on calcule le mineur obtenu, puis on applique le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = +\left(2\times(-3) - 3\times 0\right) = +(-6-0) = +(-6) = -6$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -\left(1\times(-3) - 3\times 2\right) = -(-3-6) = -(-9) = 9$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +\left(1\times 0 - 2\times 2\right) = +(0-4) = +(-4) = -4$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -\left(0\times(-3) - (-2)\times 0\right) = -(0-0) = 0$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = +\left(1\times(-3) - (-2)\times 2\right) = +(-3-(-4)) = 1$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -\left(1\times 0 - 0\times 2\right) = -(0-0) = 0$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +\left(0\times 3 - (-2)\times 2\right) = +(0-(-4)) = 4$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\left(1\times 3 - (-2)\times 1\right) = -(3-(-2)) = -5$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +\left(1\times 2 - 0\times 1\right) = +(2-0) = 2$$

Contrôle. En développant selon la ligne 1, on retrouve le déterminant : $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 1\times(-6) + 0\times 9 + (-2)\times(-4) = 2$.

On range chaque cofacteur à la place du coefficient correspondant :

$$A^c = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Étape 4 Matrice adjointe A^a et matrice inverse A^{-1}

La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs : les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a.

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 5 Vérification : $A \times A^{-1} = I_3$

Pour éviter de calculer avec des fractions, on met le facteur $\frac{1}{2}$ en avant : $A \times A^{-1} = \frac{1}{2}(A \times A^a)$. On calcule d'abord $A \times A^a$ par la disposition de Falk :

$$\begin{array}{ccc} & & \boldsymbol{A^a} \\ & \boldsymbol{A} & \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} & \\ & \boldsymbol{AA^a} & \\ & 3 \times 3 & \end{array}$$

Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= 1 \times (-6) + 0 \times 9 + (-2) \times (-4) = -6 + 0 + 8 = \mathbf{2} \\
\pi_{12} &= 1 \times 0 + 0 \times 1 + (-2) \times 0 = 0 + 0 + 0 = \mathbf{0} \\
\pi_{13} &= 1 \times 4 + 0 \times (-5) + (-2) \times 2 = 4 + 0 - 4 = \mathbf{0} \\
\pi_{21} &= 1 \times (-6) + 2 \times 9 + 3 \times (-4) = -6 + 18 - 12 = \mathbf{0} \\
\pi_{22} &= 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 0 = 0 + 2 + 0 = \mathbf{2} \\
\pi_{23} &= 1 \times 4 + 2 \times (-5) + 3 \times 2 = 4 - 10 + 6 = \mathbf{0} \\
\pi_{31} &= 2 \times (-6) + 0 \times 9 + (-3) \times (-4) = -12 + 0 + 12 = \mathbf{0} \\
\pi_{32} &= 2 \times 0 + 0 \times 1 + (-3) \times 0 = 0 + 0 + 0 = \mathbf{0} \\
\pi_{33} &= 2 \times 4 + 0 \times (-5) + (-3) \times 2 = 8 + 0 - 6 = \mathbf{2}
\end{aligned}$$

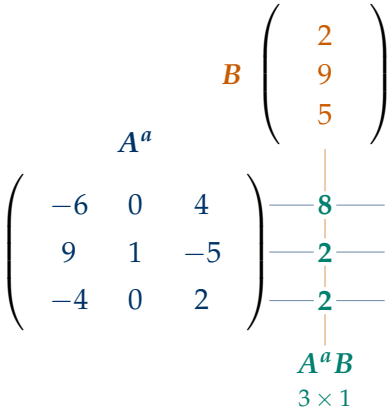
On obtient $A \times A^a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\,I_3$, d'où

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A \times A^{-1} = I_3$.

Étape 6 Résolution : $X = A^{-1}B$

En multipliant à gauche les deux membres de $AX = B$ par A^{-1}, on obtient $A^{-1}AX = A^{-1}B$, c'est-à-dire $I_3X = A^{-1}B$, soit $X = A^{-1}B$. Comme $A^{-1} = \frac{1}{2}A^a$, on calcule d'abord A^aB par la disposition de Falk (avec des nombres entiers), puis on divise par 2 :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = (-6)\times 2 + 0\times 9 + 4\times 5 = -12 + 0 + 20 = \mathbf{8}$$
$$\pi_{21} = 9\times 2 + 1\times 9 + (-5)\times 5 = 18 + 9 - 25 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{31} = (-4)\times 2 + 0\times 9 + 2\times 5 = -8 + 0 + 10 = \mathbf{2}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\times\begin{pmatrix}8\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$$

Le système admet une solution unique : $x = 4$, $y = 1$, $z = 1$, soit $\mathbb{S} = \{(4,1,1)\}$.

Corrigé de l'exercice 12 Cramer et inversion

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 25 \end{pmatrix}}_{B}$$

Méthode 1 : méthode de Cramer

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

Le système compte 3 équations et 3 inconnues : la matrice A est carrée d'ordre 3. On calcule son déterminant : Par la règle de Sarrus (produits des diagonales descendantes moins produits des diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 1 \times 2 \times 6 + 1 \times 3 \times 1 + 1 \times 1 \times 3 = 12 + 3 + 3 = \mathbf{18}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } 1 \times 2 \times 1 + 1 \times 3 \times 3 + 1 \times 1 \times 6 = 2 + 9 + 6 = \mathbf{17}$$

$$\det(A) = \mathbf{18} - \mathbf{17} = 1$$

$\det(A) = 1 \neq 0$: le système est un **système de Cramer**, il admet une **solution unique**.

Étape 3 Les déterminants $\det(A_x)$, $\det(A_y)$, $\det(A_z)$

Pour chaque inconnue, on remplace dans A la colonne de cette inconnue par la colonne B des seconds membres (en couleur), puis on calcule le déterminant de la matrice obtenue.

Matrice A_x : la colonne 1 (celle de x) est remplacée par B.

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 25 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 6 \times 2 \times 6 + 1 \times 3 \times 25 + 1 \times 14 \times 3 = 72 + 75 + 42 = \mathbf{189}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } 1 \times 2 \times 25 + 6 \times 3 \times 3 + 1 \times 14 \times 6 = 50 + 54 + 84 = \mathbf{188}$$

$$\det(A_x) = \mathbf{189} - \mathbf{188} = 1$$

Matrice A_y : la colonne 2 (celle de y) est remplacée par B.

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 1 & 25 & 6 \end{vmatrix}$$

diagonales descendantes : $1 \times 14 \times 6 + 6 \times 3 \times 1 + 1 \times 1 \times 25 = 84 + 18 + 25 = \mathbf{127}$
diagonales ascendantes : $1 \times 14 \times 1 + 1 \times 3 \times 25 + 6 \times 1 \times 6 = 14 + 75 + 36 = \mathbf{125}$

$$\det(A_y) = \mathbf{127} - \mathbf{125} = 2$$

Matrice A_z : la colonne 3 (celle de z) est remplacée par B.

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 14 \\ 1 & 3 & 25 \end{vmatrix}$$

diagonales descendantes : $1 \times 2 \times 25 + 1 \times 14 \times 1 + 6 \times 1 \times 3 = 50 + 14 + 18 = \mathbf{82}$
diagonales ascendantes : $6 \times 2 \times 1 + 1 \times 14 \times 3 + 1 \times 1 \times 25 = 12 + 42 + 25 = \mathbf{79}$

$$\det(A_z) = \mathbf{82} - \mathbf{79} = 3$$

Étape 4 Les formules de Cramer

Chaque inconnue est le quotient du déterminant de sa matrice par $\det(A)$:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{3}{1} = \mathbf{3}$$

Méthode 2 : inversion matricielle

Étape 5 Déterminant (déjà calculé)

On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = (12+3+3) - (2+9+6) = 18 - 17 \;=\; 1$$

$\det(A) = 1 \neq 0$: la matrice A est **inversible**.

Étape 6 Les neuf cofacteurs et la matrice des cofacteurs A^c

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j de A, on calcule le mineur obtenu, puis on applique le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = +(2\times 6 - 3\times 3) = +(12-9) = 3$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -(1\times 6 - 3\times 1) = -(6-3) = -3$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +(1\times 3 - 2\times 1) = +(3-2) = 1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(1\times 6 - 1\times 3) = -(6-3) = -3$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = +(1\times 6 - 1\times 1) = +(6-1) = 5$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(1\times 3 - 1\times 1) = -(3-1) = -2$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +(1\times 3 - 1\times 2) = +(3-2) = 1$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(1\times 3 - 1\times 1) = -(3-1) = -2$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(1\times 2 - 1\times 1) = +(2-1) = 1$$

Contrôle. En développant selon la ligne 1, on retrouve le déterminant : $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 1\times 3 + 1\times(-3) + 1\times 1 = 1$.

On range chaque cofacteur à la place du coefficient correspondant :

$$A^c = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 7 Matrice adjointe A^a et matrice inverse A^{-1}

La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs : les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a.

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 8 Vérification : $A \times A^{-1} = I_3$

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{A^{-1}} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{A} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{matrix} \\ & \boldsymbol{AA^{-1}} \\ & 3 \times 3 \end{array}$$

Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= 1 \times 3 + 1 \times (-3) + 1 \times 1 = 3 - 3 + 1 = \mathbf{1} \\
\pi_{12} &= 1 \times (-3) + 1 \times 5 + 1 \times (-2) = -3 + 5 - 2 = \mathbf{0} \\
\pi_{13} &= 1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 1 - 2 + 1 = \mathbf{0} \\
\pi_{21} &= 1 \times 3 + 2 \times (-3) + 3 \times 1 = 3 - 6 + 3 = \mathbf{0} \\
\pi_{22} &= 1 \times (-3) + 2 \times 5 + 3 \times (-2) = -3 + 10 - 6 = \mathbf{1} \\
\pi_{23} &= 1 \times 1 + 2 \times (-2) + 3 \times 1 = 1 - 4 + 3 = \mathbf{0} \\
\pi_{31} &= 1 \times 3 + 3 \times (-3) + 6 \times 1 = 3 - 9 + 6 = \mathbf{0} \\
\pi_{32} &= 1 \times (-3) + 3 \times 5 + 6 \times (-2) = -3 + 15 - 12 = \mathbf{0} \\
\pi_{33} &= 1 \times 1 + 3 \times (-2) + 6 \times 1 = 1 - 6 + 6 = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A \times A^{-1} = I_3$.

Étape 9 Résolution : $X = A^{-1}B$

En multipliant à gauche les deux membres de $AX = B$ par A^{-1}, on obtient $A^{-1}AX = A^{-1}B$, c'est-à-dire $I_3X = A^{-1}B$, soit $X = A^{-1}B$. On calcule ce produit par la disposition de Falk :

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{B} \\ & \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 25 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{A^{-1}} & \\ \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \to 1 \\ \to 2 \\ \to 3 \end{matrix} \\ & \boldsymbol{X} \\ & 3 \times 1 \end{array}$$

Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 3 \times 6 + (-3) \times 14 + 1 \times 25 = 18 - 42 + 25 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{21} = (-3) \times 6 + 5 \times 14 + (-2) \times 25 = -18 + 70 - 50 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{31} = 1 \times 6 + (-2) \times 14 + 1 \times 25 = 6 - 28 + 25 = \mathbf{3}$$

Les deux méthodes donnent la même solution.

Étape 10 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système :

$$\text{équation } 1 : 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 1 + 2 + 3 = 6 \checkmark$$
$$\text{équation } 2 : 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 1 + 4 + 9 = 14 \checkmark$$
$$\text{équation } 3 : 1 \times 1 + 3 \times 2 + 6 \times 3 = 1 + 6 + 18 = 25 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système admet une solution unique : $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, soit $\mathbb{S} = \{(1,2,3)\}$.

Remarque

Comparaison. Pour un seul système, la méthode de Cramer est souvent la plus rapide : quatre déterminants et trois divisions. L'inversion demande un déterminant, neuf cofacteurs et un produit matriciel ; elle devient intéressante lorsqu'il faut résoudre **plusieurs systèmes de même matrice** A (exercice suivant).

Corrigé de l'exercice 13 — plusieurs seconds membres

Étape 1 Forme matricielle

Les trois systèmes ont la **même matrice** A (les temps unitaires) ; seuls les seconds membres changent d'un mois à l'autre :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 25 \\ 45 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 75 \\ 45 \\ 55 \end{pmatrix}.$$

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = (2+0+1) - (1+0+1) = 3-2 \ = \ 1$$

$\det(A) = 1 \neq 0$: c'est un **système de Cramer**, et la matrice A est **inversible**.

Étape 3 Les neuf cofacteurs et la matrice des cofacteurs A^c

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j de A, on calcule le mineur obtenu, puis on applique le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(1\times 1 - 0\times 1) = +(1-0) = 1$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1\times 1 - 0\times 1) = -(1-0) = -1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(1\times 1 - 1\times 1) = +(1-1) = 0$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1\times 1 - 1\times 1) = -(1-1) = 0$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(2\times 1 - 1\times 1) = +(2-1) = 1$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2\times 1 - 1\times 1) = -(2-1) = -1$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +(1\times 0 - 1\times 1) = +(0-1) = +(-1) = -1$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(2\times 0 - 1\times 1) = -(0-1) = -(-1) = 1$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +\left(2\times 1 - 1\times 1\right) = +\left(2-1\right) = 1$$

Contrôle. En développant selon la ligne 1, on retrouve le déterminant : $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 2\times 1 + 1\times(-1) + 1\times 0 = 1$.

On range chaque cofacteur à la place du coefficient correspondant :

$$A^c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 4 Matrice adjointe A^a et matrice inverse A^{-1}

La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs : les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a.

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,A^a = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 5 Vérification : $A \times A^{-1} = I_3$

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{A^{-1}} \\ \boldsymbol{A} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{AA^{-1}} \\ & 3\times 3 \end{array}$$

Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= 2\times 1 + 1\times(-1) + 1\times 0 = 2-1+0 = \mathbf{1} \\
\pi_{12} &= 2\times 0 + 1\times 1 + 1\times(-1) = 0+1-1 = \mathbf{0} \\
\pi_{13} &= 2\times(-1) + 1\times 1 + 1\times 1 = -2+1+1 = \mathbf{0} \\
\pi_{21} &= 1\times 1 + 1\times(-1) + 0\times 0 = 1-1+0 = \mathbf{0} \\
\pi_{22} &= 1\times 0 + 1\times 1 + 0\times(-1) = 0+1+0 = \mathbf{1} \\
\pi_{23} &= 1\times(-1) + 1\times 1 + 0\times 1 = -1+1+0 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\pi_{31} = 1\times 1 + 1\times(-1) + 1\times 0 = 1 - 1 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{32} = 1\times 0 + 1\times 1 + 1\times(-1) = 0 + 1 - 1 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{33} = 1\times(-1) + 1\times 1 + 1\times 1 = -1 + 1 + 1 = \mathbf{1}$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A \times A^{-1} = I_3$.

Étape 6 Les trois systèmes en un seul produit

Chaque solution s'obtient par $X_k = A^{-1}B_k$. Plutôt que de faire trois produits, on range les trois seconds membres côte à côte dans une matrice $\mathbf{B} = (B_1 \mid B_2 \mid B_3)$ de taille 3×3 : chaque colonne du produit $A^{-1}\mathbf{B}$ est la solution du mois correspondant.

$$\underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 20 & 10 & 25 \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \underset{\mathbf{B}}{\begin{pmatrix} 70 & 60 & 75 \\ 30 & 25 & 45 \\ 60 & 45 & 55 \end{pmatrix}}$$

$\mathbf{X}$ 3×3

Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 1\times 70 + 0\times 30 + (-1)\times 60 = 70 + 0 - 60 = \mathbf{10}$$
$$\pi_{12} = 1\times 60 + 0\times 25 + (-1)\times 45 = 60 + 0 - 45 = \mathbf{15}$$
$$\pi_{13} = 1\times 75 + 0\times 45 + (-1)\times 55 = 75 + 0 - 55 = \mathbf{20}$$
$$\pi_{21} = (-1)\times 70 + 1\times 30 + 1\times 60 = -70 + 30 + 60 = \mathbf{20}$$
$$\pi_{22} = (-1)\times 60 + 1\times 25 + 1\times 45 = -60 + 25 + 45 = \mathbf{10}$$
$$\pi_{23} = (-1)\times 75 + 1\times 45 + 1\times 55 = -75 + 45 + 55 = \mathbf{25}$$
$$\pi_{31} = 0\times 70 + (-1)\times 30 + 1\times 60 = 0 - 30 + 60 = \mathbf{30}$$
$$\pi_{32} = 0\times 60 + (-1)\times 25 + 1\times 45 = 0 - 25 + 45 = \mathbf{20}$$
$$\pi_{33} = 0\times 75 + (-1)\times 45 + 1\times 55 = 0 - 45 + 55 = \mathbf{10}$$

Les colonnes de **X** donnent les productions mensuelles :

— en **janvier** : 10 chemises, 20 pantalons et 30 vestes ;

— en **février** : 15 chemises, 10 pantalons et 20 vestes ;

— en **mars** : 20 chemises, 25 pantalons et 10 vestes.

Remarque

C'est le grand intérêt de l'inversion matricielle : A^{-1} est calculée **une seule fois**, puis chaque nouveau mois ne demande qu'un produit. Avec la méthode de Cramer, il aurait fallu recalculer trois nouveaux déterminants chaque mois.

Corrigé de l'exercice 14 homogène

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

Tous les seconds membres sont nuls ($B = 0$) : le système est **homogène**.

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

Le système compte 2 équations et 2 inconnues : la matrice A est carrée d'ordre 2. On calcule son déterminant :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - (-1) \times 1 = 6 - (-1) = 7$$

$\det(A) = 7 \neq 0$: le système est un **système de Cramer**, il admet une **solution unique**.

Étape 3 La solution

Un système homogène admet toujours la **solution nulle** : en remplaçant x, y par 0, chaque équation devient $0 = 0$. Comme le système est de Cramer, sa solution est unique : la solution nulle est donc la **seule** solution.

On retrouve ce résultat par les formules de Cramer : dans chaque matrice A_x, A_y, la colonne remplacée par B ne contient que des zéros, donc son déterminant est nul (en développant selon cette colonne, chaque produit contient un zéro). Par exemple :

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{0}{7} = 0,$$

et de même pour les autres inconnues.

Le système admet une seule solution, la solution nulle : $\mathrm{S} = \{(0, 0)\}$.

Corrigé de l'exercice 15 — homogène

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

Tous les seconds membres sont nuls ($B = 0$) : le système est **homogène**.

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

Le système compte 3 équations et 3 inconnues : la matrice A est carrée d'ordre 3. On calcule son déterminant : Par la règle de Sarrus (produits des diagonales descendantes moins produits des diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 1 \times 1 \times 3 + 2 \times 1 \times 1 + (-1) \times 2 \times (-1) = 3 + 2 + 2 = \mathbf{7}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } (-1) \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times (-1) + 2 \times 2 \times 3 = -1 - 1 + 12 = \mathbf{10}$$

$$\det(A) = \mathbf{7} - \mathbf{10} = -3$$

$\det(A) = -3 \neq 0$: le système est un **système de Cramer**, il admet une **solution unique**.

Étape 3 La solution

Un système homogène admet toujours la **solution nulle** : en remplaçant x, y, z par 0, chaque équation devient $0 = 0$. Comme le système est de Cramer, sa solution est unique : la solution nulle est donc la **seule** solution.

On retrouve ce résultat par les formules de Cramer : dans chaque matrice A_x, A_y, A_z, la colonne remplacée par B ne contient que des zéros, donc son déterminant est nul (en développant selon cette colonne, chaque produit contient un zéro). Par exemple :

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{0}{-3} = 0,$$

et de même pour les autres inconnues.

Le système admet une seule solution, la solution nulle : $\mathbb{S} = \{(0,0,0)\}$.

Corrigé de l'exercice 16

homogène, Gauss-Jordan

Étape 1 Le système est-il un système de Cramer ?

La matrice des coefficients est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule son déterminant par la règle de Sarrus :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 1\times 3\times 0 + 2\times 1\times 3 + (-1)\times 2\times 5 = 0+6-10 = \mathbf{-4}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } (-1)\times 3\times 3 + 1\times 1\times 5 + 2\times 2\times 0 = -9+5+0 = \mathbf{-4}$$

$$\det(A) = \mathbf{-4} - \mathbf{(-4)} \;=\; 0$$

$\det(A) = 0$: le système **n'est pas** un système de Cramer. Il admet toujours la solution nulle, mais elle n'est pas la seule : il y a une **infinité de solutions**. Pour les trouver, on applique la méthode de Gauss-Jordan (série 8). Les opérations élémentaires transforment des zéros en zéros : la colonne des seconds membres **reste nulle** jusqu'au bout.

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : z n'apparaît pas dans l'équation 3 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ \textcircled{2} & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $3 - 2 \times 2 = -1$; $1 - 2 \times (-1) = 3$; $0 - 2 \times 0 = 0$.

Transformation 2. Pour annuler le 3 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ \textcircled{3} & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $5 - 3 \times 2 = -1$; $0 - 3 \times (-1) = 3$; $0 - 3 \times 0 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 3=-3$; $(-1)\times 0=0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le -1 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $3+1\times(-3)=0$; $0+1\times 0=0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0=0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{16} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 5. Pour annuler le 2 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 deux fois la ligne L_2 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{2} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 2L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-1 - 2 \times (-3) = 5$; $0 - 2 \times 0 = 0$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + 5z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : z.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = -5\alpha \\ y = 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Étape 7 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = -5$, $y = 3$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : 1 \times (-5) + 2 \times 3 + (-1) \times 1 = -5 + 6 - 1 = 0 \ \checkmark \\ &\text{équation 2} : 2 \times (-5) + 3 \times 3 + 1 \times 1 = -10 + 9 + 1 = 0 \ \checkmark \\ &\text{équation 3} : 3 \times (-5) + 5 \times 3 = -15 + 15 = 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{16}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (-5\alpha, 3\alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Remarque

Pour un système homogène, $B = 0$: on a toujours $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$. Un système homogène est donc **toujours compatible** : soit la solution nulle est la seule ($\det(A) \neq 0$), soit il y a une infinité de solutions ($\det(A) = 0$).

Corrigé de l'exercice 17

homogène, paramètre m

Étape 1 Déterminant en fonction de m

La matrice des coefficients est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par la règle de Sarrus :

$$\text{diagonales descendantes} : 1 \times m \times 2 + 2 \times 3 \times 1 + 1 \times 2 \times 1 = 2m + 6 + 2 = \mathbf{2m + 8}$$
$$\text{diagonales ascendantes} : 1 \times m \times 1 + 1 \times 3 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 = m + 3 + 8 = \mathbf{m + 11}$$

$$\det(A) = (\mathbf{2m + 8}) - (\mathbf{m + 11}) = 2m + 8 - m - 11 = m - 3.$$

Étape 2 Cas $m \neq 3$

Si $m \neq 3$, alors $\det(A) = m - 3 \neq 0$: le système est un **système de Cramer**. Sa solution est unique ; comme la solution nulle convient toujours pour un système homogène, c'est la seule : $S = \{(0,0,0)\}$.

Cas $m = 3$

Si $m = 3$, alors $\det(A) = 0$: le système n'est pas de Cramer et admet une infinité de solutions. Il s'écrit

$$\mathcal{S}_{17} : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

On le résout par la méthode de Gauss-Jordan ; la colonne des seconds membres reste nulle.

Étape 3 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Étape 4 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ \textcircled{2} & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $3 - 2 \times 2 = -1$; $3 - 2 \times 1 = 1$; $0 - 2 \times 0 = 0$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \textcircled{1} & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 2 = -1$; $2 - 1 \times 1 = 1$; $0 - 1 \times 0 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 1 = -1$; $(-1) \times 0 = 0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le -1 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & (-1) & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $1+1\times(-1)=0$; $0+1\times 0=0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0=0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 5 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B)=2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A)=2$.

$$\text{rang}(A)=\text{rang}(A|B)=2<m=3 \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{S}_{17} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 6 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 5. Pour annuler le 2 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 deux fois la ligne L_2 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 2L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $1 - 2 \times (-1) = 3$; $0 - 2 \times 0 = 0$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 7 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : z.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = -3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Étape 8 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = -3$, $y = 1$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation } 1 : 1 \times (-3) + 2 \times 1 + 1 \times 1 = -3 + 2 + 1 = 0 \checkmark$$
$$\text{équation } 2 : 2 \times (-3) + 3 \times 1 + 3 \times 1 = -6 + 3 + 3 = 0 \checkmark$$
$$\text{équation } 3 : 1 \times (-3) + 1 \times 1 + 2 \times 1 = -3 + 1 + 2 = 0 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{17}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathrm{S} = \left\{ (-3\alpha, \alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Remarque

Un système homogène admet des solutions non nulles **si et seulement si** $\det(A) = 0$. Chercher ces solutions revient donc à chercher les valeurs du paramètre qui annulent le déterminant.

Corrigé de l'exercice 18

gestion, Cramer

Étape 1 Mise en équation

Chaque ligne du tableau donne une équation : la quantité utilisée de chaque ingrédient doit être égale au stock disponible.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x + y + z = 80 \\ x + 2y + z = 90 \\ x + y + 2z = 70 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 70 \end{pmatrix}}_{B}$$

Étape 3 Le système est-il un système de Cramer ?

Le système compte 3 équations et 3 inconnues : la matrice A est carrée d'ordre 3. On calcule son déterminant : Par la règle de Sarrus (produits des diagonales descendantes moins produits des diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 2 \times 2 \times 2 + 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 = 8 + 1 + 1 = \mathbf{10}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } 1 \times 2 \times 1 + 2 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 = 2 + 2 + 2 = \mathbf{6}$$

$$\det(A) = \mathbf{10} - \mathbf{6} \;=\; 4$$

$\det(A) = 4 \neq 0$: le système est un **système de Cramer**, il admet une **solution unique**.

Étape 4 Les déterminants $\det(A_x)$, $\det(A_y)$, $\det(A_z)$

Pour chaque inconnue, on remplace dans A la colonne de cette inconnue par la colonne B des seconds membres (en couleur), puis on calcule le déterminant de la matrice obtenue.

Matrice A_x : la colonne 1 (celle de x) est remplacée par B.

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 80 & 1 & 1 \\ 90 & 2 & 1 \\ 70 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{diagonales descendantes : } 80 \times 2 \times 2 + 1 \times 1 \times 70 + 1 \times 90 \times 1 = 320 + 70 + 90 = \mathbf{480}$$
$$\text{diagonales ascendantes : } 1 \times 2 \times 70 + 80 \times 1 \times 1 + 1 \times 90 \times 2 = 140 + 80 + 180 = \mathbf{400}$$

$$\det(A_x) = \mathbf{480} - \mathbf{400} \;=\; 80$$

Matrice A_y : la colonne 2 (celle de y) est remplacée par B.

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 2 & 80 & 1 \\ 1 & 90 & 1 \\ 1 & 70 & 2 \end{vmatrix}$$

diagonales descendantes : $2 \times 90 \times 2 + 80 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 70 = 360 + 80 + 70 = \mathbf{510}$

diagonales ascendantes : $1 \times 90 \times 1 + 2 \times 1 \times 70 + 80 \times 1 \times 2 = 90 + 140 + 160 = \mathbf{390}$

$$\det(A_y) = \mathbf{510} - \mathbf{390} = 120$$

Matrice A_z : la colonne 3 (celle de z) est remplacée par B.

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 80 \\ 1 & 2 & 90 \\ 1 & 1 & 70 \end{vmatrix}$$

diagonales descendantes : $2 \times 2 \times 70 + 1 \times 90 \times 1 + 80 \times 1 \times 1 = 280 + 90 + 80 = \mathbf{450}$

diagonales ascendantes : $80 \times 2 \times 1 + 2 \times 90 \times 1 + 1 \times 1 \times 70 = 160 + 180 + 70 = \mathbf{410}$

$$\det(A_z) = \mathbf{450} - \mathbf{410} = 40$$

Étape 5 Les formules de Cramer

Chaque inconnue est le quotient du déterminant de sa matrice par $\det(A)$:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{80}{4} = \mathbf{20}$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{120}{4} = \mathbf{30}$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{40}{4} = \mathbf{10}$$

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système :

$$\text{équation 1 : } 2\times 20+1\times 30+1\times 10=40+30+10=80\ \checkmark$$
$$\text{équation 2 : } 1\times 20+2\times 30+1\times 10=20+60+10=90\ \checkmark$$
$$\text{équation 3 : } 1\times 20+1\times 30+2\times 10=20+30+20=70\ \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

La pâtisserie doit préparer **20 fournées de cornes de gazelle, 30 fournées de chebakia et 10 fournées de ghriba** : les stocks de farine, d'amandes et de miel sont alors entièrement utilisés.

Corrigé de l'exercice 19

gestion, inversion

Étape 1 Mise en équation

Le montant de chaque facture est la somme des quantités achetées multipliées par les prix unitaires :

$$\mathcal{S}:\begin{cases}2x+\ y+3z=80\\ x+2y+\ z=65\\ 3x+\ y+2z=85\end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX=B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&1\\3&1&2\end{pmatrix}}_{A}\ \underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}80\\65\\85\end{pmatrix}}_{B}$$

Étape 3 Le système est-il un système de Cramer ?

On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = (8+3+3) - (18+2+2) = 14 - 22 = -8$$

$\det(A) = -8 \neq 0$: c'est un **système de Cramer**, et la matrice A est **inversible**.

Étape 4 Les neuf cofacteurs et la matrice des cofacteurs A^c

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j de A, on calcule le mineur obtenu, puis on applique le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(2\times 2 - 1\times 1) = +(4-1) = 3$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(1\times 2 - 1\times 3) = -(2-3) = -(-1) = 1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +(1\times 1 - 2\times 3) = +(1-6) = +(-5) = -5$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1\times 2 - 3\times 1) = -(2-3) = -(-1) = 1$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = +(2\times 2 - 3\times 3) = +(4-9) = +(-5) = -5$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2\times 1 - 1\times 3) = -(2-3) = -(-1) = 1$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +(1\times 1 - 3\times 2) = +(1-6) = +(-5) = -5$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2\times 1 - 3\times 1) = -(2-3) = -(-1) = 1$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(2\times 2 - 1\times 1) = +(4-1) = 3$$

Contrôle. En développant selon la ligne 1, on retrouve le déterminant : $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 2\times 3 + 1\times 1 + 3\times(-5) = -8$.

On range chaque cofacteur à la place du coefficient correspondant :

$$A^c = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Étape 5 Matrice adjointe A^a et matrice inverse A^{-1}

La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs : les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a.

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Étape 6 Vérification : $A \times A^{-1} = I_3$

Pour éviter de calculer avec des fractions, on met le facteur $\frac{1}{8}$ en avant : $A \times A^{-1} = -\frac{1}{8}(A \times A^a)$. On calcule d'abord $A \times A^a$ par la disposition de Falk :

		A^a		
		3	1	−5
		1	−5	1
		−5	1	3
A				
2	1	3	−8	0	0
1	2	1	0	−8	0
3	1	2	0	0	−8
			AA^a		
			3×3		

Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 2\times 3 + 1\times 1 + 3\times(-5) = 6 + 1 - 15 = \mathbf{-8}$$
$$\pi_{12} = 2\times 1 + 1\times(-5) + 3\times 1 = 2 - 5 + 3 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{13} = 2\times(-5) + 1\times 1 + 3\times 3 = -10 + 1 + 9 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = 1\times 3 + 2\times 1 + 1\times(-5) = 3 + 2 - 5 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 1\times 1 + 2\times(-5) + 1\times 1 = 1 - 10 + 1 = \mathbf{-8}$$
$$\pi_{23} = 1\times(-5) + 2\times 1 + 1\times 3 = -5 + 2 + 3 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{31} = 3\times 3 + 1\times 1 + 2\times(-5) = 9 + 1 - 10 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{32} = 3\times 1 + 1\times(-5) + 2\times 1 = 3 - 5 + 2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{33} = 3\times(-5) + 1\times 1 + 2\times 3 = -15 + 1 + 6 = \mathbf{-8}$$

On obtient $A \times A^a = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = -8\, I_3$, d'où

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{-8} \times \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A \times A^{-1} = I_3$.

Étape 7 Résolution : $X = A^{-1}B$

En multipliant à gauche les deux membres de $AX = B$ par A^{-1}, on obtient $A^{-1}AX = A^{-1}B$, c'est-à-dire $I_3X = A^{-1}B$, soit $X = A^{-1}B$. Comme $A^{-1} = -\frac{1}{8}A^a$, on calcule d'abord A^aB par la disposition de Falk (avec des nombres entiers), puis on divise par -8 :

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{B} \\ & \begin{pmatrix} 80 \\ 65 \\ 85 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{A^a} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{-120} \\ \boldsymbol{-160} \\ \boldsymbol{-80} \end{matrix} \\ & \boldsymbol{A^aB} \\ & 3 \times 1 \end{array}$$

Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 3 \times 80 + 1 \times 65 + (-5) \times 85 = 240 + 65 - 425 = \mathbf{-120}$$
$$\pi_{21} = 1 \times 80 + (-5) \times 65 + 1 \times 85 = 80 - 325 + 85 = \mathbf{-160}$$
$$\pi_{31} = (-5) \times 80 + 1 \times 65 + 3 \times 85 = -400 + 65 + 255 = \mathbf{-80}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-8} \times \begin{pmatrix} -120 \\ -160 \\ -80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Les prix unitaires sont : **15 DH** le bidon d'huile, **20 DH** le paquet de thé et **10 DH** le pain de sucre.

Remarque

Si de nouvelles factures arrivent avec les mêmes quantités, A^{-1} déjà calculée permet de vérifier instantanément si les prix ont changé.

Corrigé de l'exercice 20

gestion, homogène

Étape 1 Mise en équation

Les dépenses du tisserand sont $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z$; elles doivent être égales à son revenu x. On fait passer x à gauche, puis on multiplie par 6 pour supprimer les fractions :

$$\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{2}z=x \iff -\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{2}z=0 \iff -3x+2y+3z = 0.$$

De même pour le potier (on multiplie par 12) et pour le menuisier (par 12) :

$$\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{4}z=y \iff 3x-8y+3z=0, \qquad \tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{4}z=z \iff 3x+4y-9z = 0.$$

Tous les seconds membres sont nuls : l'équilibre se traduit par le système homogène

$$\mathcal{S}_{20} : \begin{cases} -3x+2y+3z=0 \\ 3x-8y+3z=0 \\ 3x+4y-9z=0 \end{cases}$$

Étape 2 Le système est-il un système de Cramer ?

$$\det(A)=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & 3 \\ 3 & 4 & -9 \end{vmatrix}$$

diagonales descendantes : $(-3)\times(-8)\times(-9)+2\times3\times3+3\times3\times4=-216+18+36=\mathbf{-162}$

diagonales ascendantes : $3\times(-8)\times3+(-3)\times3\times4+2\times3\times(-9)=-72-36-54=\mathbf{-162}$

$$\det(A)=\mathbf{-162}-\mathbf{(-162)} = 0$$

$\det(A)=0$: le système n'est pas de Cramer. Il admet une **infinité de solutions**, autres que la solution nulle (qui signifierait l'absence de toute activité). On applique la méthode de Gauss-Jordan ; la colonne des seconds membres reste nulle.

Étape 3 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & 3 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

Étape 4 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -3. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{3}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-3} & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{3}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{3} \times (-3) = 1$; $-\frac{1}{3} \times 2 = -\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3} \times 3 = -1$; $-\frac{1}{3} \times 0 = 0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 3 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ \textcircled{3} & -8 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $-8 - 3 \times (-\frac{2}{3}) = -6$; $3 - 3 \times (-1) = 6$; $0 - 3 \times 0 = 0$.

Transformation 3. Pour annuler le 3 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ \textcircled{3} & 4 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $4 - 3 \times (-\frac{2}{3}) = 6$; $-9 - 3 \times (-1) = -6$; $0 - 3 \times 0 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -6. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{6}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-6} & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{6}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{6} \times (-6) = 1$; $-\frac{1}{6} \times 6 = -1$; $-\frac{1}{6} \times 0 = 0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le 6 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 six fois la ligne L_2 (car $6 - 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{6} & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 6L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $6 - 6 \times 1 = 0$; $-6 - 6 \times (-1) = 0$; $0 - 6 \times 0 = 0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 5 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{20} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 6 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 6. Pour annuler le $-\frac{2}{3}$ de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 la ligne L_2 multipliée par $\frac{2}{3}$ (car $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + \frac{2}{3}L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times 1 = 0$; $-1 + \frac{2}{3} \times (-1) = -\frac{5}{3}$; $0 + \frac{2}{3} \times 0 = 0$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 7 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{3}z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : z.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3}\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Étape 8 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = \frac{5}{3}$, $y = 1$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : (-3) \times \tfrac{5}{3} + 2 \times 1 + 3 \times 1 = -5 + 2 + 3 = 0 \ \checkmark \\ &\text{équation 2} : 3 \times \tfrac{5}{3} + (-8) \times 1 + 3 \times 1 = 5 - 8 + 3 = 0 \ \checkmark \\ &\text{équation 3} : 3 \times \tfrac{5}{3} + 4 \times 1 + (-9) \times 1 = 5 + 4 - 9 = 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{20}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \left\{ \left(\tfrac{5}{3}\alpha, \alpha, \alpha\right) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Étape 9 Interprétation

Les revenus d'équilibre sont proportionnels : $x = \frac{5}{3}\alpha$, $y = \alpha$ et $z = \alpha$. Pour un revenu du menuisier de 30 milliers de dirhams, on prend $\alpha = 30$: $x = \frac{5}{3} \times 30 = 50$ et $y = 30$.

À l'équilibre, le tisserand gagne **50 milliers de dirhams**, le potier et le menuisier **30 milliers de dirhams** chacun. Les échanges n'imposent que les **proportions** entre les revenus $(5 : 3 : 3)$; c'est pourquoi le système a une infinité de solutions.

Remarque

Ce modèle simplifié est un **modèle d'échanges de Leontief** : il est utilisé en économie pour étudier les échanges entre secteurs d'activité. Avec des dizaines de secteurs, seul un logiciel peut le résoudre.

Bilan de la série

Ce qu'il faut retenir

— **Toujours commencer par** $\det(A)$: c'est lui qui oriente vers la bonne méthode.

— $\det(A) \neq 0$ (système de Cramer) : solution unique, par la méthode de Cramer ou par $X = A^{-1}B$.

— **Méthode de Cramer** : rapide pour un seul système d'ordre 2 ou 3 ; chaque inconnue est un quotient de deux déterminants.

— **Inversion matricielle** : intéressante lorsque plusieurs systèmes ont la même matrice A ; on vérifie toujours que $A \times A^{-1} = I_n$.

— **Système homogène** : toujours la solution nulle ; c'est la seule si $\det(A) \neq 0$, sinon il y a une infinité de solutions, obtenues par Gauss-Jordan.

— $\det(A) = 0$ **ou système non carré** : retour à la méthode générale (Gauss, Rouché-Fontené, Gauss-Jordan).

Récapitulatif des résultats

Ex.	Thème	Méthode	Résultat
1	Reconnaître un système de Cramer (ordre 2)	déterminant	seul $\mathcal{S}_a$ est de Cramer
2	Reconnaître un système de Cramer (ordre 3)	déterminant	$\mathcal{S}_a$ de Cramer, $\mathcal{S}_b$ non
3	Méthode de Cramer, ordre 2	méthode de Cramer	$(4, 2)$
4	Méthode de Cramer, ordre 2, solution fractionnaire	méthode de Cramer	$(\frac{5}{7}, -\frac{1}{7})$
5	Méthode de Cramer, ordre 3	méthode de Cramer	$(1, 2, 3)$
6	Méthode de Cramer, ordre 3, coefficients négatifs	méthode de Cramer	$(2, -1, 1)$
7	Méthode de Cramer, ordre 3, avec des zéros	méthode de Cramer	$(1, 2, 3)$
8	Inversion matricielle, ordre 2	$X = A^{-1}B$	$(1, 2)$
9	Inversion matricielle, ordre 2, avec une division	$X = A^{-1}B$	$(2, 3)$
10	Inversion matricielle, ordre 3	$X = A^{-1}B$	$(1, 2, 3)$
11	Inversion matricielle, ordre 3, avec des zéros	$X = A^{-1}B$	$(4, 1, 1)$
12	Un même système, deux méthodes	les deux	$(1, 2, 3)$
13	Plusieurs systèmes de même matrice	$\mathbf{X} = A^{-1}\mathbf{B}$	$(10, 20, 30)$, $(15, 10, 20)$, $(20, 25, 10)$
14	Système homogène d'ordre 2	déterminant	solution nulle seulement
15	Système homogène d'ordre 3, déterminant non nul	déterminant	solution nulle seulement
16	Système homogène, déterminant nul	Gauss-Jordan	infinité (1 paramètre)
17	Système homogène avec un paramètre	déterminant, Gauss-Jordan	$m \neq 3$: solution nulle ; $m = 3$: infinité
18	Application : utiliser tous les stocks	méthode de Cramer	$(20, 30, 10)$
19	Application : retrouver des prix unitaires	$X = A^{-1}B$	$(15, 20, 10)$
20	Application : l'équilibre des échanges	Gauss-Jordan	revenus $(50, 30, 30)$

Partie 3 : Quand les calculs se compliquent, MATLAB

▶ Les limites du calcul à la main

Pour un système d'ordre 3, la méthode de Cramer demande déjà quatre déterminants d'ordre 3. Pour un système de 10 équations à 10 inconnues, il faudrait calculer onze déterminants d'ordre 10 : c'est hors de portée d'un calcul à la main, et même la méthode des cofacteurs pour l'inverse devient impraticable.

Pourquoi passer par un logiciel ?

— **Le calcul devient fastidieux** dès l'ordre 4, et les fractions alourdissent chaque étape.

— **Le risque d'erreur devient trop élevé** : une seule erreur de signe dans un déterminant fausse la solution.

— **En gestion, les systèmes sont grands** : plans de production, modèles d'échanges entre secteurs, répartition des coûts entre de nombreux services.

Dès que les choses commencent à se compliquer, il faut donc passer par un logiciel de calcul comme **MATLAB** (ou ses équivalents gratuits Octave et Python). Le rôle de l'étudiant reste essentiel : **choisir la méthode**, vérifier que le système est de Cramer et **interpréter le résultat**.

▶ Résoudre un système de Cramer avec MATLAB

La fonction `det` renvoie le déterminant et `inv` la matrice inverse. L'instruction `A\B` résout directement le système $AX = B$. On peut aussi programmer la méthode de Cramer en quelques lignes : `Ax(:,k) = B` remplace la colonne k par B.

Script MATLAB : les systèmes de Cramer de la série

```
format rat                % affichage sous forme de fractions

% Exercice 6 : méthode de Cramer, programmée
A = [2 -1 3; 1 2 -1; 3 1 1];
B = [8; -1; 6];
dA = det(A)
X = zeros(3,1);
for k = 1:3
    Ak = A;
    Ak(:,k) = B;          % la colonne k est remplacée par B
    X(k) = det(Ak)/dA;
end
X

% Exercice 13 : trois seconds membres d'un seul coup
M = [2 1 1; 1 1 0; 1 1 1];
BB = [70 60 75; 30 25 45; 60 45 55];
XX = inv(M)*BB            % chaque colonne : une solution
XX2 = M\BB                % même résultat, plus rapide
```

Résultat affiché par MATLAB

```
dA =
      -5

X =
       2
      -1
       1

XX =
      10          15          20
      20          10          25
      30          20          10

XX2 =
      10          15          20
      20          10          25
      30          20          10
```

▶ Systèmes homogènes avec MATLAB

Pour un système homogène, on vérifie d'abord le déterminant. S'il est nul, la fonction `rref` donne directement la forme échelonnée réduite A_r (le résultat de la descente puis de la remontée), et `null(A,'r')` donne une solution de base, dont toutes les autres sont des multiples.

Script MATLAB : exercice 20

```
A = [-3 2 3; 3 -8 3; 3 4 -9];
det(A)                  % 0 : infinité de solutions
Ar = rref(A)            % forme échelonnée réduite
v = null(A,'r')         % une solution de base
revenus = 30*v          % revenu du menuisier fixé à 30
```

Résultat affiché par MATLAB

```
ans =
       0

Ar =
       1           0        -5/3
       0           1          -1
       0           0           0

v =
       5/3
       1
       1

revenus =
      50
      30
      30
```

Comment lire ces résultats

— On retrouve la solution $(2, -1, 1)$ de l'exercice 6, les trois productions mensuelles de l'exercice 13 et les revenus d'équilibre $(50, 30, 30)$ de l'exercice 20.

— La matrice `Ar` est la forme échelonnée réduite A_r de l'exercice 20 : en revenant au système, on lit $x = \frac{5}{3}z$ et $y = z$.

— Le calcul d'un déterminant sur ordinateur peut donner un tout petit nombre (par exemple `1e-15`) au lieu de 0, à cause des arrondis : un tel nombre doit être lu comme un zéro.

— Pour les grands systèmes, `A\B` est plus rapide et plus précis que `inv(A)*B` et que la méthode de Cramer.