Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

SÉRIE 6

SÉRIE D'EXERCICES CORRIGÉS

Le rang et le nombre de solutions

Théorème de Rouché-Fontené

OBJECTIF

Déterminer, sans résoudre le système, s'il admet une solution unique, une infinité de solutions ou aucune solution, en comparant $\text{rang}(A)$ et $\text{rang}(A|B)$.

20 systèmes linéaires | Corrigés détaillés pas à pas | Systèmes carrés et rectangulaires

AU SOMMAIRE

Partie 1 **Énoncés** rappels du cours et 20 systèmes linéaires

Partie 2 **Corrigés détaillés** démarche en quatre étapes pour chaque système

Bilan **Ce qu'il faut retenir** et récapitulatif des résultats

Partie 3 **MATLAB** quand les calculs se compliquent

MODULE	PROFESSEUR	ANNÉE UNIVERSITAIRE
Mathématiques pour la gestion	**Jaouad Madkour**	**2026–2027**

Partie 1 : Énoncés

▶ Rappels du cours

La série 5 a montré comment échelonner une matrice par l'algorithme de Gauss et lire son rang. Cette série applique ces outils aux systèmes : en comparant le rang de A et celui de la matrice augmentée $A|B$, le théorème de Rouché-Fontené indique, avant toute résolution, si le système n'a aucune solution, une seule ou une infinité.

Avant d'aborder les exercices, rappelons les résultats du cours utiles pour cette série, ainsi que la démarche à suivre pour chaque système.

Matrice augmentée et rang

Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système linéaire $\mathcal{S}$ à n équations et m inconnues : A est la matrice des coefficients ($n \times m$), X le vecteur des inconnues et B le vecteur des constantes.

— La **matrice augmentée** $A|B$ s'obtient en joignant le vecteur B à droite de la matrice A, séparé par une barre verticale.

— Le **rang** d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée en lignes.

— On note $A_e|B_e$ la forme échelonnée de $A|B$ (l'indice e signifie « échelonnée »). On obtient alors **d'un seul coup** les deux rangs : $\text{rang}(A|B)$ = nombre de lignes non nulles de $A_e|B_e$, et $\text{rang}(A)$ = nombre de lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre).

Théorème de Rouché-Fontené : nombre de solutions d'un système linéaire

Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système linéaire $\mathcal{S}$ à n équations et m inconnues :

— Si $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|B)$, le système $\mathcal{S}$ est **incompatible**. Il n'admet **aucune solution** : $\mathbb{S} = \emptyset$.

— Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = r$, le système $\mathcal{S}$ est **compatible** :

▷ si $r = m$, le système est **compatible déterminé** : il admet une **solution unique** ;

▷ si $r < m$, le système est **compatible indéterminé** : il admet une **infinité de solutions**.

$$\begin{aligned} \text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|B) &\quad\Longrightarrow\quad \text{aucune solution} \\ \text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = m &\quad\Longrightarrow\quad \text{solution unique} \\ \text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) < m &\quad\Longrightarrow\quad \text{infinité de solutions} \end{aligned}$$

△ ! Précaution essentielle : le même ordre des inconnues partout

Avant d'écrire la matrice des coefficients A, il faut que **les inconnues apparaissent dans le même ordre dans toutes les équations** (x, puis y, puis z, puis t). Sinon, les coefficients sont rangés dans les mauvaises colonnes : la matrice A est **fausse**, et tous les résultats qui suivent (rangs, nature du système, solutions) le sont aussi.

1. Réécrire chaque équation en plaçant les inconnues dans l'ordre x, y, z, t.
2. Lorsqu'une inconnue n'apparaît pas dans une équation, son coefficient est 0 : on écrit ce 0 dans la matrice.
3. Le vecteur X accueille les inconnues **dans ce même ordre** : la première colonne de A correspond à la première inconnue de X, la deuxième colonne à la deuxième inconnue, etc.

Exemple.

$$\underbrace{\begin{cases} 2y + x = 5 \\ x - z = 1 \\ 3z + y - x = 2 \end{cases}}_{\text{inconnues dans le désordre}} \Longrightarrow \underbrace{\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - z = 1 \\ -x + y + 3z = 2 \end{cases}}_{\text{inconnues remises dans l'ordre}}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Erreur fréquente : recopier la première équation telle qu'elle est écrite donnerait la ligne $(2 \ 1 \ 0)$, qui correspond à $2x + y$: c'est un autre système !

Démarche à suivre pour chaque système

1. **Écriture matricielle** : écrire le système sous la forme $AX = B$.
2. **Matrice augmentée** : former $A|B$.
3. **Échelonnement** : réduire $A|B$ à sa forme échelonnée $A_e|B_e$ par l'algorithme de Gauss, puis lire $\text{rang}(A)$ et $\text{rang}(A|B)$.
4. **Conclusion** : appliquer le théorème de Rouché-Fontené (sans résoudre le système).

Rappel : les trois opérations élémentaires sur les lignes

O_1	Permuter deux lignes de la matrice	$L_i \leftrightarrow L_j$
O_2	Multiplier une ligne par une constante *non nulle* α	$\alpha\, L_i \quad (\alpha \neq 0)$
O_3	Ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne	$L_i + \beta\, L_j \quad (j \neq i)$

Les principes de l'algorithme de Gauss vus dans la série n°5 restent valables : on travaille colonne par colonne, de gauche à droite ; un pivot est non nul, de préférence égal à 1 ; on ne modifie jamais un zéro déjà obtenu.

Consigne commune

Pour chacun des systèmes linéaires suivants, **déterminer le nombre de solutions** sans résoudre le système, en suivant les quatre étapes de la démarche : écriture matricielle, matrice augmentée, échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss (**une seule opération élémentaire à la fois**) et conclusion par le théorème de Rouché-Fontené.

► Les exercices

Exercice 1 — 2 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x = -3 \\ -x + y = 5 \end{cases}$$

corrigé p. 6 →

Exercice 2 — 2 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} -x - y = 3 \\ -3x - 3y = 10 \end{cases}$$

corrigé p. 8 →

Exercice 3 — 2 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

corrigé p. 10 →

Exercice 4 — 2 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_4 : \begin{cases} 2x - 6y + 2z = 4 \\ -2x + 7y - z = -6 \end{cases}$$

corrigé p. 12 →

Exercice 5 — 2 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_5 : \begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ -2x - 6y - 6z = 2 \end{cases}$$

corrigé p. 15 →

Exercice 6 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_6 : \begin{cases} -2x + 6y + 2z = 12 \\ -x + 4y + 2z = 7 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

corrigé p. 17 →

Exercice 7 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_7 : \begin{cases} x + 9y + z = -8 \\ -x - 3y - z = 2 \\ -2x - 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

corrigé p. 20 →

Exercice 8 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_8 : \begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ -y + z = 1 \\ -6x + 7y + 5z = 1 \end{cases}$$

corrigé p. 23 →

Exercice 9 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_9 : \begin{cases} 2y = 0 \\ -2x - 8y - 8z = -6 \\ 2x + 6y + 6z = 0 \end{cases}$$

corrigé p. 27 →

Exercice 10 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{10} : \begin{cases} 3y - 3z = 9 \\ 2x + 2y + 6z = 2 \\ 2x + 5y + 3z = 11 \end{cases}$$

corrigé p. 30 →

Exercice 11 3 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_{11} : \begin{cases} -2x = -4 \\ 2x - 4y = 12 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

corrigé p. 33 →

Exercice 12 3 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_{12} : \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 2y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$$

corrigé p. 36 →

Exercice 13 3 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{13} : \begin{cases} -2x + 4y - 2z - 4t = -12 \\ -2y + 6z + 8t = -12 \\ 2x - 6y + 6z + 6t = 6 \end{cases}$$

corrigé p. 39 →

Exercice 14 3 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{14} : \begin{cases} -x + 3y + 3z - 3t = 3 \\ x - y - 5z + 5t = 3 \\ -x - 3y + 9z - 9t = -14 \end{cases}$$

corrigé p. 42 →

Exercice 15 4 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{15} : \begin{cases} -y + z = -1 \\ 3x - 6y - 3z = -15 \\ 3x - 3y - 3z = -6 \\ 6x - 4y - 9z = -12 \end{cases}$$

corrigé p. 45 →

Exercice 16 4 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{16} : \begin{cases} -x - 3y - z = -2 \\ -3x - 8y - 9z = 6 \\ -x - 3y - 2z = 1 \\ 2x + 6y + 2z = 6 \end{cases}$$

corrigé p. 50 →

Exercice 17 4 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{17} : \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ -x + 3y - 5z = 0 \\ -3x + 3y - 9z = -6 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

corrigé p. 53 →

Exercice 18 4 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{18} : \begin{cases} 2x + 2y + 6z = -4 \\ 2x + y + 8z + 3t = -5 \\ 2x + 5y + z - 7t = 0 \\ 2x + 3y + 3z - 4t = -2 \end{cases}$$

corrigé p. 57 →

Exercice 19 4 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{19} : \begin{cases} 2x - 2y + 2z + 4t = 6 \\ 2x - 2y + z + 2t = 5 \\ -2x + y - 2z - 4t = -7 \\ -y - z - 2t = -2 \end{cases}$$

corrigé p. 61 →

Exercice 20 4 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{20} : \begin{cases} 2y + 4z + 2t = -4 \\ x - 3y - 3z + 2t = -1 \\ 2y + 5z + 4t = -1 \\ -2x + 6y + 7z - 2t = 8 \end{cases}$$

corrigé p. 65 →

Partie 2 : Corrigés détaillés

Conventions de lecture

— Les lignes de chaque matrice sont notées $L_1, L_2, L_3, \ldots$ selon leur position dans la matrice *actuelle* : après chaque étape, la numérotation repart de L_1.

— Au-dessus de chaque flèche figure la transformation effectuée ; en dessous, le code de l'opération élémentaire (O_1, O_2 ou O_3).

— Chaque opération porte sur **toute la ligne**, second membre compris ; la nouvelle ligne est calculée **coefficient par coefficient**, de gauche à droite.

$\boxed{2}$ pivot en cours d'utilisation (encadré en bleu)

$\textcircled{-3}$ nombre à annuler (entouré en orange)

1 pivot de la forme échelonnée obtenue (en rouge)

Corrigé de l'exercice 1

2 équations, 2 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x = -3 \\ -x + y = 5 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 2×2, le vecteur X de taille 2×1 et le vecteur B de taille 2×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 1. Pour annuler le -1 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $1+1\times 0=1$; $5+1\times(-3)=2$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. Il ne reste plus que la ligne L_2 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Il n'y a plus de ligne sous L_2 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 2 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A|B)=2$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 2 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A)=2$.

$\operatorname{rang}(A)=2$ $\operatorname{rang}(A|B)=2$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 2$ au nombre d'inconnues $m = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_1 \text{ est compatible déterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_1$ est **compatible déterminé** : il admet **une solution unique**.

Corrigé de l'exercice 2

2 équations, 2 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} -x - y = 3 \\ -3x - 3y = 10 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 2×2, le vecteur X de taille 2×1 et le vecteur B de taille 2×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 10 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par -1.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{-1} & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 3=-3$.

Transformation 2. Pour annuler le -3 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 trois fois la ligne L_1 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & -3 \\ \textcircled{-3} & -3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3+3\times 1=0$; $-3+3\times 1=0$; $10+3\times(-3)=1$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. Il ne reste plus que la ligne L_2 à traiter. Le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) vaut 0, et c'est aussi le cas de toutes les lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot** : on passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_2.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, la ligne L_2 ne contient plus que des zéros, mais son second membre n'est pas entièrement nul : le second membre 1 de L_2 traduit l'équation $0x+0y=1$, qui est **impossible**. On continue l'algorithme dans la colonne des constantes. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Il n'y a plus de ligne sous L_2 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 1 ligne non nulle, donc $\text{rang}(A) = 1$.

$\text{rang}(A) = 1$ $\text{rang}(A|B) = 2$

Étape 4 **Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené**

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = 1 \neq \text{rang}(A|B) = 2$. Les deux rangs sont différents : la dernière ligne non nulle de $A_e|B_e$ n'a des coefficients non nuls qu'à droite de la barre, ce qui correspond à une équation impossible du type $0 = 1$.

$$\text{rang}(A) = 1 \neq \text{rang}(A|B) = 2 \implies \mathcal{S}_2 \text{ est incompatible : } \mathrm{S} = \emptyset.$$

Le système $\mathcal{S}_2$ est **incompatible** : il n'admet **aucune solution**.

Corrigé de l'exercice 3

2 équations, 2 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 2×2, le vecteur X de taille 2×1 et le vecteur B de taille 2×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_2, on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & 1 \\ \textcircled{1} & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-1 - 1 \times (-1) = 0$; $1 - 1 \times 1 = 0$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. La ligne L_2 est entièrement nulle, second membre compris : elle correspond à l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information. Elle ne peut plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 1 ligne non nulle, donc $\text{rang}(A|B) = 1$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 1 ligne non nulle, donc $\text{rang}(A) = 1$.

$\text{rang}(A) = 1$ $\text{rang}(A|B) = 1$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 1$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 1$ au nombre d'inconnues $m = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 1 < m = 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_3 \text{ est compatible indéterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_3$ est **compatible indéterminé** : il admet **une infinité de solutions**. Il n'y a qu'une seule équation « utile » pour 2 inconnues : 1 inconnue peut être choisie librement.

Corrigé de l'exercice 4

2 équations, 3 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_4 : \begin{cases} 2x - 6y + 2z = 4 \\ -2x + 7y - z = -6 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 2×3, le vecteur X de taille 3×1 et le vecteur B de taille 2×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -6 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 7 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-6) = -3$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 4 = 2$.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 1 & 2 \\ \textcircled{-2} & 7 & -1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $7 + 2 \times (-3) = 1$; $-1 + 2 \times 1 = 1$; $-6 + 2 \times 2 = -2$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. Il ne reste plus que la ligne L_2 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Il n'y a plus de ligne sous L_2 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -3 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 2 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A|B) = 2$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 2 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A) = 2$.

$$\operatorname{rang}(A) = 2 \qquad \operatorname{rang}(A|B) = 2$$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = 2$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 2$ au nombre d'inconnues $m = 3$.

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_4 \text{ est compatible indéterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_4$ est **compatible indéterminé** : il admet **une infinité de solutions**. Il n'y a que 2 équations « utiles » pour 3 inconnues : 1 inconnue peut être choisie librement.

Corrigé de l'exercice 5

2 équations, 3 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_5 : \begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ -2x - 6y - 6z = 2 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & -6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 2×3, le vecteur X de taille 3×1 et le vecteur B de taille 2×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 1. Pour annuler le -2 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 3 & 0 \\ \textcircled{-2} & -6 & -6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $-6+2\times 3=0$; $-6+2\times 3=0$; $2+2\times 0=2$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. Il ne reste plus que la ligne L_2 à traiter. Le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) vaut 0, et c'est aussi le cas de toutes les lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot** : on passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_2.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_2 à traiter. Le coefficient de L_2 dans la colonne 3 (coefficients de z) vaut 0, et c'est aussi le cas de toutes les lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot** : on passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_2.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, la ligne L_2 ne contient plus que des zéros, mais son second membre n'est pas entièrement nul : le second membre 2 de L_2 traduit l'équation $0x+0y+0z=2$, qui est **impossible**. On continue l'algorithme dans la colonne des constantes. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 2. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2=1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_2 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 1 ligne non nulle, donc $\text{rang}(A) = 1$.

$\text{rang}(A) = 1$ $\text{rang}(A|B) = 2$

Étape 4 **Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené**

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = 1 \neq \text{rang}(A|B) = 2$. Les deux rangs sont différents : la dernière ligne non nulle de $A_e|B_e$ n'a des coefficients non nuls qu'à droite de la barre, ce qui correspond à une équation impossible du type $0 = 1$.

$$\text{rang}(A) = 1 \neq \text{rang}(A|B) = 2 \implies \mathcal{S}_5 \text{ est incompatible : } \mathrm{S} = \emptyset.$$

Le système $\mathcal{S}_5$ est **incompatible** : il n'admet **aucune solution**.

Corrigé de l'exercice 6

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_6 : \begin{cases} -2x + 6y + 2z = 12 \\ -x + 4y + 2z = 7 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 3×3, le vecteur X de taille 3×1 et le vecteur B de taille 3×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 6 & 2 & 12 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 6 & 2 & 12 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -6 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 6 = -3$; $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$; $-\frac{1}{2} \times 12 = -6$.

Transformation 2. Pour annuler le -1 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -1 & -6 \\ \textcircled{-1} & 4 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $4+1\times(-3)=1$; $2+1\times(-1)=1$; $7+1\times(-6)=1$.

Transformation 3. Pour annuler le -1 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \textcircled{-1} & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $2+1\times(-3)=-1$; $-1+1\times(-1)=-2$; $3+1\times(-6)=-3$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 4. Pour annuler le -1 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $-2+1\times 1=-1$; $-3+1\times 1=-2$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par -1.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-2)=2$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -3 & -1 & -6 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 3 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 3 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = 3 \qquad \text{rang}(A|B) = 3$$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 3$ au nombre d'inconnues $m = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_6 \text{ est compatible déterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_6$ est **compatible déterminé** : il admet **une solution unique**.

Corrigé de l'exercice 7

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_7 : \begin{cases} x + 9y + z = -8 \\ -x - 3y - z = 2 \\ -2x - 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 3×3, le vecteur X de taille 3×1 et le vecteur B de taille 3×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 1 & -8 \\ -1 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 1. Pour annuler le -1 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 9 & 1 & -8 \\ \textcircled{-1} & -3 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $-3 + 1 \times 9 = 6$; $-1 + 1 \times 1 = 0$; $2 + 1 \times (-8) = -6$.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 9 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ \textcircled{-2} & -4 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 14 & 0 & -14 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $-4+2\times 9=14$; $-2+2\times 1=0$; $2+2\times(-8)=-14$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 6 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{6}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 1 & -8 \\ 0 & \boxed{6} & 0 & -6 \\ 0 & 14 & 0 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{6}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 14 & 0 & -14 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{6}\times 6=1$; $\frac{1}{6}\times 0=0$; $\frac{1}{6}\times(-6)=-1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 4. Pour annuler le 14 de L_3, on retranche à la ligne L_3 14 fois la ligne L_2 (car $14-14\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 1 & -8 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \textcircled{14} & 0 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-14L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $14-14\times 1=0$; $0-14\times 0=0$; $-14-14\times(-1)=0$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle correspond à l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information. Elle ne peut plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 9 & 1 & -8 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$\text{rang}(A) = 2$ $\qquad$ $\text{rang}(A|B) = 2$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 2$ au nombre d'inconnues $m = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_7 \text{ est compatible indéterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_7$ est **compatible indéterminé** : il admet **une infinité de solutions**. Il n'y a que 2 équations « utiles » pour 3 inconnues : 1 inconnue peut être choisie librement.

Corrigé de l'exercice 8

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_8 : \begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ -y + z = 1 \\ -6x + 7y + 5z = 1 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 2 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -6 & 7 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 3×3, le vecteur X de taille 3×1 et le vecteur B de taille 3×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & 7 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & 7 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & 7 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$; $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$; $-\frac{1}{2} \times 0 = 0$.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 2. Pour annuler le -6 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 six fois la ligne L_1 (car $-6+6\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ (-6) & 7 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+6L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-6+6\times 1=0$; $7+6\times(-1)=1$; $5+6\times(-1)=-1$; $1+6\times 0=1$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par -1.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 1=-1$; $(-1)\times 1=-1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 4. Pour annuler le 1 de L_3, on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & (1) & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $-1-1\times(-1)=0$; $1-1\times(-1)=2$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) vaut 0, et c'est aussi le cas de toutes les lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot** : on passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_3.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, la ligne L_3 ne contient plus que des zéros, mais son second membre n'est pas entièrement nul : le second membre 2 de L_3 traduit l'équation $0x+0y+0z=2$, qui est **impossible**. On continue l'algorithme dans la colonne des constantes. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 3 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$\text{rang}(A) = 2$ $\text{rang}(A|B) = 3$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|B) = 3$. Les deux rangs sont différents : la dernière ligne non nulle de $A_e|B_e$ n'a des coefficients non nuls qu'à droite de la barre, ce qui correspond à une équation impossible du type $0 = 1$.

$$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|B) = 3 \implies \mathcal{S}_8 \text{ est incompatible : } \mathrm{S} = \emptyset.$$

Le système $\mathcal{S}_8$ est **incompatible** : il n'admet **aucune solution**.

Corrigé de l'exercice 9

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_9 : \begin{cases} 2y = 0 \\ -2x - 8y - 8z = -6 \\ 2x + 6y + 6z = 0 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x et z n'apparaissent pas dans l'équation 1 : les coefficients correspondants valent 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & -8 & -8 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 3×3, le vecteur X de taille 3×1 et le vecteur B de taille 3×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & -8 & -6 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_2 (coefficient -2). On échange donc L_1 et L_2. Échanger deux lignes revient simplement à changer l'ordre des équations : le système reste le même.

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & -8 & -6 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -8 & -8 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 2. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & -8 & -8 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times (-8) = 4$; $-\frac{1}{2} \times (-8) = 4$; $-\frac{1}{2} \times (-6) = 3$.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \textcircled{2} & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $6 - 2 \times 4 = -2$; $6 - 2 \times 4 = -2$; $0 - 2 \times 3 = -6$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 0 = 0$; $\frac{1}{2} \times 0 = 0$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 5. Pour annuler le -2 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{-2} & -2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $-2+2\times 0=-2$; $-6+2\times 0=-6$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times(-6)=3$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 4 & 4 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 3 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A|B)=3$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 3 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A)=3$.

$\operatorname{rang}(A)=3$ $\operatorname{rang}(A|B)=3$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 3$ au nombre d'inconnues $m = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_9 \text{ est compatible déterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_9$ est **compatible déterminé** : il admet **une solution unique**.

Corrigé de l'exercice 10

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_{10} : \begin{cases} 3y - 3z = 9 \\ 2x + 2y + 6z = 2 \\ 2x + 5y + 3z = 11 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 3×3, le vecteur X de taille 3×1 et le vecteur B de taille 3×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 9 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_2 (coefficient 2). On échange donc L_1 et L_2. Échanger deux lignes revient simplement à changer l'ordre des équations : le système reste le même.

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 9 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 2. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 6 = 3$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ \textcircled{2} & 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $5 - 2 \times 1 = 3$; $3 - 2 \times 3 = -3$; $11 - 2 \times 1 = 9$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 3 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$; $\frac{1}{3} \times (-3) = -1$; $\frac{1}{3} \times 9 = 3$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 5. Pour annuler le 3 de L_3, on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & \textcircled{3} & -3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $-3 - 3 \times (-1) = 0$; $9 - 3 \times 3 = 0$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle correspond à l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information. Elle ne peut plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$\text{rang}(A) = 2$ $\quad$ $\text{rang}(A|B) = 2$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 2$ au nombre d'inconnues $m = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{10} \text{ est compatible indéterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_{10}$ est **compatible indéterminé** : il admet **une infinité de solutions**. Il n'y a que 2 équations « utiles » pour 3 inconnues : 1 inconnue peut être choisie librement.

Corrigé de l'exercice 11

3 équations, 2 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_{11} : \begin{cases} -2x & = -4 \\ 2x - 4y & = 12 \\ 2x + 2y & = 0 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 3×2, le vecteur X de taille 2×1 et le vecteur B de taille 3×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 12 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{-2} & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 12 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 12 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 0 = 0$; $-\frac{1}{2} \times (-4) = 2$.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_2, on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 2 \\ \textcircled{2} & -4 & 12 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 8 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-4 - 2 \times 0 = -4$; $12 - 2 \times 2 = 8$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 8 \\ \textcircled{2} & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $2 - 2 \times 0 = 2$; $0 - 2 \times 2 = -4$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -4 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $-\frac{1}{4}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{-4} & 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{4}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{4} \times (-4) = 1$; $-\frac{1}{4} \times 8 = -2$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 5. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & \textcircled{2} & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-4 - 2 \times (-2) = 0$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle correspond à l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information. Elle ne peut plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$\text{rang}(A) = 2$ $\quad$ $\text{rang}(A|B) = 2$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 2$ au nombre d'inconnues $m = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{11} \text{ est compatible déterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_{11}$ est **compatible déterminé** : il admet **une solution unique**. Bien qu'il comporte plus d'équations (3) que d'inconnues (2), une équation est redondante : elle se déduit des autres (ligne nulle dans $A_e|B_e$).

Corrigé de l'exercice 12

3 équations, 2 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_{12} : \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 2y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 2 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 3×2, le vecteur X de taille 2×1 et le vecteur B de taille 3×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 8 & 7 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 8 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 8 & 7 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2 = 1$; $\frac{1}{2}\times(-2) = -1$; $\frac{1}{2}\times 4 = 2$.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ \textcircled{-2} & 8 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 11 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1 = 0$; $8+2\times(-1) = 6$; $7+2\times 2 = 11$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 6 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 11 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2 = 1$; $\frac{1}{2}\times 4 = 2$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 4. Pour annuler le 6 de L_3, on retranche à la ligne L_3 six fois la ligne L_2 (car $6 - 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & \textcircled{6} & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 6L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $6 - 6 \times 1 = 0$; $11 - 6 \times 2 = -1$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, la ligne L_3 ne contient plus que des zéros, mais son second membre n'est pas entièrement nul : le second membre -1 de L_3 traduit l'équation $0x + 0y = -1$, qui est **impossible**. On continue l'algorithme dans la colonne des constantes. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par -1.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1) \times (-1) = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 3 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$\text{rang}(A) = 2$ $\quad$ $\text{rang}(A|B) = 3$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|B) = 3$. Les deux rangs sont différents : la dernière ligne non nulle de $A_e|B_e$ n'a des coefficients non nuls qu'à droite de la barre, ce qui correspond à une équation impossible du type $0 = 1$.

$$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|B) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{12} \text{ est incompatible : } \mathbb{S} = \emptyset.$$

Le système $\mathcal{S}_{12}$ est **incompatible** : il n'admet **aucune solution**.

Corrigé de l'exercice 13

3 équations, 4 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_{13} : \begin{cases} -2x + 4y - 2z - 4t = -12 \\ -2y + 6z + 8t = -12 \\ 2x - 6y + 6z + 6t = 6 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 4$ inconnues (x, y, z, t).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 2 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 6 & 8 \\ 2 & -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 3×4, le vecteur X de taille 4×1 et le vecteur B de taille 3×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & -2 & -4 & -12 \\ 0 & -2 & 6 & 8 & -12 \\ 2 & -6 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-2} & 4 & -2 & -4 & -12 \\ 0 & -2 & 6 & 8 & -12 \\ 2 & -6 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 8 & -12 \\ 2 & -6 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times 4=-2$; $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times(-4)=2$; $-\frac{1}{2}\times(-12)=6$.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 8 & -12 \\ \textcircled{2} & -6 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 8 & -12 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $-6-2\times(-2)=-2$; $6-2\times 1=4$; $6-2\times 2=2$; $6-2\times 6=-6$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{-2} & 6 & 8 & -12 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times 6=-3$; $-\frac{1}{2}\times 8=-4$; $-\frac{1}{2}\times(-12)=6$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 4. Pour annuler le -2 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -4 & 6 \\ 0 & \textcircled{-2} & 4 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $4+2\times(-3)=-2$; $2+2\times(-4)=-6$; $-6+2\times 6=6$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times(-6)=3$; $-\frac{1}{2}\times 6=-3$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & -3 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 3 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A|B)=3$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 3 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A)=3$.

$$\operatorname{rang}(A)=3 \qquad \operatorname{rang}(A|B)=3$$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 3$ au nombre d'inconnues $m = 4$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 < m = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{13} \text{ est compatible indéterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_{13}$ est **compatible indéterminé** : il admet **une infinité de solutions**. Il n'y a que 3 équations « utiles » pour 4 inconnues : 1 inconnue peut être choisie librement.

Corrigé de l'exercice 14

3 équations, 4 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_{14} : \begin{cases} -x + 3y + 3z - 3t = 3 \\ x - y - 5z + 5t = 3 \\ -x - 3y + 9z - 9t = -14 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 4$ inconnues (x, y, z, t).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & -3 & 9 & -9 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -14 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 3×4, le vecteur X de taille 4×1 et le vecteur B de taille 3×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -5 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & 9 & -9 & -14 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par -1.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 3 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -5 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & 9 & -9 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -5 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & 9 & -9 & -14 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 3=-3$; $(-1)\times 3=-3$; $(-1)\times(-3)=3$; $(-1)\times 3=-3$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_2, on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & -3 & 3 & -3 \\ \textcircled{1} & -1 & -5 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & 9 & -9 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 6 \\ -1 & -3 & 9 & -9 & -14 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $-1-1\times(-3)=2$; $-5-1\times(-3)=-2$; $5-1\times 3=2$; $3-1\times(-3)=6$.

Transformation 3. Pour annuler le -1 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 6 \\ \textcircled{-1} & -3 & 9 & -9 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & -6 & -17 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $-3+1\times(-3)=-6$; $9+1\times(-3)=6$; $-9+1\times 3=-6$; $-14+1\times(-3)=-17$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & -6 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & -6 & -17 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 6 = 3$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 5. Pour annuler le -6 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 six fois la ligne L_2 (car $-6 + 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \textcircled{-6} & 6 & -6 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 6L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-6 + 6 \times 1 = 0$; $6 + 6 \times (-1) = 0$; $-6 + 6 \times 1 = 0$; $-17 + 6 \times 3 = 1$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) vaut 0, et c'est aussi le cas de toutes les lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot** : on passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_3.

Colonne 4. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le coefficient de L_3 dans la colonne 4 (coefficients de t) vaut 0, et c'est aussi le cas de toutes les lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot** : on passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_3.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, la ligne L_3 ne contient plus que des zéros, mais son second membre n'est pas entièrement nul : le second membre 1 de L_3 traduit l'équation $0x + 0y + 0z + 0t = 1$, qui est **impossible**. On continue l'algorithme dans la colonne des constantes. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 3 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A|B) = 3$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 2 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A) = 2$.

$$\operatorname{rang}(A) = 2 \qquad \operatorname{rang}(A|B) = 3$$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\operatorname{rang}(A) = 2 \neq \operatorname{rang}(A|B) = 3$. Les deux rangs sont différents : la dernière ligne non nulle de $A_e|B_e$ n'a des coefficients non nuls qu'à droite de la barre, ce qui correspond à une équation impossible du type $0 = 1$.

$$\operatorname{rang}(A) = 2 \neq \operatorname{rang}(A|B) = 3 \implies \mathcal{S}_{14} \text{ est incompatible : } \mathbb{S} = \emptyset.$$

Le système $\mathcal{S}_{14}$ est **incompatible** : il n'admet **aucune solution**.

Corrigé de l'exercice 15

4 équations, 3 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_{15} : \begin{cases} -y + z = -1 \\ 3x - 6y - 3z = -15 \\ 3x - 3y - 3z = -6 \\ 6x - 4y - 9z = -12 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 6 & -4 & -9 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -15 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 4×3, le vecteur X de taille 3×1 et le vecteur B de taille 4×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & -3 & -15 \\ 3 & -3 & -3 & -6 \\ 6 & -4 & -9 & -12 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_2 (coefficient 3). On échange donc L_1 et L_2. Échanger deux lignes revient simplement à changer l'ordre des équations : le système reste le même.

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & -3 & -15 \\ 3 & -3 & -3 & -6 \\ 6 & -4 & -9 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & -3 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 & -6 \\ 6 & -4 & -9 & -12 \end{array}\right)$$

Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 3 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 2. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & -6 & -3 & & -15 \\ 0 & -1 & 1 & & -1 \\ 3 & -3 & -3 & & -6 \\ 6 & -4 & -9 & & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & & -5 \\ 0 & -1 & 1 & & -1 \\ 3 & -3 & -3 & & -6 \\ 6 & -4 & -9 & & -12 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$; $\frac{1}{3} \times (-6) = -2$; $\frac{1}{3} \times (-3) = -1$; $\frac{1}{3} \times (-15) = -5$.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 3. Pour annuler le 3 de L_3, on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & & -5 \\ 0 & -1 & 1 & & -1 \\ \textcircled{3} & -3 & -3 & & -6 \\ 6 & -4 & -9 & & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & & -5 \\ 0 & -1 & 1 & & -1 \\ 0 & 3 & 0 & & 9 \\ 6 & -4 & -9 & & -12 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $-3 - 3 \times (-2) = 3$; $-3 - 3 \times (-1) = 0$; $-6 - 3 \times (-5) = 9$.

Transformation 4. Pour annuler le 6 de L_4, on retranche à la ligne L_4 six fois la ligne L_1 (car $6 - 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & & -5 \\ 0 & -1 & 1 & & -1 \\ 0 & 3 & 0 & & 9 \\ \textcircled{6} & -4 & -9 & & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 6L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & & -5 \\ 0 & -1 & 1 & & -1 \\ 0 & 3 & 0 & & 9 \\ 0 & 8 & -3 & & 18 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $6 - 6 \times 1 = 0$; $-4 - 6 \times (-2) = 8$; $-9 - 6 \times (-1) = -3$; $-12 - 6 \times (-5) = 18$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par -1.

Transformation 5. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & & -5 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & & -1 \\ 0 & 3 & 0 & & 9 \\ 0 & 8 & -3 & & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & & -5 \\ 0 & 1 & -1 & & 1 \\ 0 & 3 & 0 & & 9 \\ 0 & 8 & -3 & & 18 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 1 = -1$; $(-1) \times (-1) = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 6. Pour annuler le 3 de L_3, on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & \textcircled{3} & 0 & 9 \\ 0 & 8 & -3 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & -3 & 18 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $0 - 3 \times (-1) = 3$; $9 - 3 \times 1 = 6$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

Transformation 7. Pour annuler le 8 de L_4, on retranche à la ligne L_4 huit fois la ligne L_2 (car $8 - 8 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & \textcircled{8} & -3 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 8L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $8 - 8 \times 1 = 0$; $-3 - 8 \times (-1) = 5$; $18 - 8 \times 1 = 10$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 3 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 8. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$; $\frac{1}{3} \times 6 = 2$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 9. Pour annuler le 5 de L_4, on retranche à la ligne L_4 cinq fois la ligne L_3 (car $5 - 5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{5} & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 5L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $5 - 5 \times 1 = 0$; $10 - 5 \times 2 = 0$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_3 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. La ligne L_4 est entièrement nulle, second membre compris : elle correspond à l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information. Elle ne peut plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & -1 & -5 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 3 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 3 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = 3 \qquad \text{rang}(A|B) = 3$$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 3$ au nombre d'inconnues $m = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{15} \text{ est compatible déterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_{15}$ est **compatible déterminé** : il admet **une solution unique**. Bien qu'il comporte plus d'équations (4) que d'inconnues (3), une équation est redondante : elle se déduit des autres (ligne nulle dans $A_e|B_e$).

Corrigé de l'exercice 16

4 équations, 3 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_{16} : \begin{cases} -x - 3y - z = -2 \\ -3x - 8y - 9z = 6 \\ -x - 3y - 2z = 1 \\ 2x + 6y + 2z = 6 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & -8 & -9 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 4×3, le vecteur X de taille 3×1 et le vecteur B de taille 4×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & -1 & -2 \\ -3 & -8 & -9 & 6 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par -1.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & -3 & -1 & -2 \\ -3 & -8 & -9 & 6 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & -8 & -9 & 6 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-3)=3$; $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-2)=2$.

Transformation 2. Pour annuler le -3 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 trois fois la ligne L_1 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 1 & 2 \\ \textcircled{-3} & -8 & -9 & 6 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 12 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3+3\times 1=0$; $-8+3\times 3=1$; $-9+3\times 1=-6$; $6+3\times 2=12$.

Transformation 3. Pour annuler le -1 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 12 \\ \textcircled{-1} & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $-3+1\times 3=0$; $-2+1\times 1=-1$; $1+1\times 2=3$.

Transformation 4. Pour annuler le 2 de L_4, on retranche à la ligne L_4 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ \textcircled{2} & 6 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4-2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $6-2\times 3=0$; $2-2\times 1=0$; $6-2\times 2=2$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Le coefficient de L_4 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par -1.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 3 = -3$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Le coefficient de L_4 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_3 ne sera plus utilisée.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, la ligne L_4 ne contient plus que des zéros, mais son second membre n'est pas entièrement nul : le second membre 2 de L_4 traduit l'équation $0x + 0y + 0z = 2$, qui est **impossible**. On continue l'algorithme dans la colonne des constantes. Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_4 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_4 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_4} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_4 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -6 & 12 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 4 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 4$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 3 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$\text{rang}(A) = 3$ $\text{rang}(A|B) = 4$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = 3 \neq \text{rang}(A|B) = 4$. Les deux rangs sont différents : la dernière ligne non nulle de $A_e|B_e$ n'a des coefficients non nuls qu'à droite de la barre, ce qui correspond à une équation impossible du type $0 = 1$.

$$\text{rang}(A) = 3 \neq \text{rang}(A|B) = 4 \implies \mathcal{S}_{16} \text{ est incompatible : } \mathbb{S} = \emptyset.$$

Le système $\mathcal{S}_{16}$ est **incompatible** : il n'admet **aucune solution**.

Corrigé de l'exercice 17

4 équations, 3 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_{17} : \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ -x + 3y - 5z = 0 \\ -3x + 3y - 9z = -6 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : z n'apparaît pas dans l'équation 4 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \\ -3 & 3 & -9 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 4×3, le vecteur X de taille 3×1 et le vecteur B de taille 4×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 0 \\ -3 & 3 & -9 & -6 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 1. Pour annuler le -1 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 3 & 2 \\ \textcircled{-1} & 3 & -5 & 0 \\ -3 & 3 & -9 & -6 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -9 & -6 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $3 + 1 \times (-1) = 2$; $-5 + 1 \times 3 = -2$; $0 + 1 \times 2 = 2$.

Transformation 2. Pour annuler le -3 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -9 & -6 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3+3\times 1=0$; $3+3\times(-1)=0$; $-9+3\times 3=0$; $-6+3\times 2=0$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_4, on retranche à la ligne L_4 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4-2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $4-2\times(-1)=6$; $0-2\times 3=-6$; $10-2\times 2=6$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2=1$; $\frac{1}{2}\times(-2)=-1$; $\frac{1}{2}\times 2=1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 5. Pour annuler le 6 de L_4, on retranche à la ligne L_4 six fois la ligne L_2 (car $6-6\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4-6L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $6-6\times 1=0$; $-6-6\times(-1)=0$; $6-6\times 1=0$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. Les lignes L_3, L_4 sont entièrement nulles, seconds membres compris : elles correspondent à l'équation $0 = 0$, toujours vraie. L'algorithme s'arrête.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 2 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = 2 \qquad \text{rang}(A|B) = 2$$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 2$ au nombre d'inconnues $m = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{17} \text{ est compatible indéterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_{17}$ est **compatible indéterminé** : il admet **une infinité de solutions**. Il n'y a que 2 équations « utiles » pour 3 inconnues : 1 inconnue peut être choisie librement.

Corrigé de l'exercice 18

4 équations, 4 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_{18} : \begin{cases} 2x + 2y + 6z = -4 \\ 2x + y + 8z + 3t = -5 \\ 2x + 5y + z - 7t = 0 \\ 2x + 3y + 3z - 4t = -2 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 4$ inconnues (x, y, z, t).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : t n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 4×4, le vecteur X de taille 4×1 et le vecteur B de taille 4×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 2 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2 = 1$; $\frac{1}{2}\times 2 = 1$; $\frac{1}{2}\times 6 = 3$; $\frac{1}{2}\times 0 = 0$; $\frac{1}{2}\times(-4) = -2$.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_2, on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2\times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & -2 \\ \textcircled{2} & 1 & 8 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2\times 1 = 0$; $1 - 2\times 1 = -1$; $8 - 2\times 3 = 2$; $3 - 2\times 0 = 3$; $-5 - 2\times(-2) = -1$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2\times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ \textcircled{2} & 5 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -7 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2\times 1 = 0$; $5 - 2\times 1 = 3$; $1 - 2\times 3 = -5$; $-7 - 2\times 0 = -7$; $0 - 2\times(-2) = 4$.

Transformation 4. Pour annuler le 2 de L_4, on retranche à la ligne L_4 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2\times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -7 & 4 \\ \textcircled{2} & 3 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2\times 1 = 0$; $3 - 2\times 1 = 1$; $3 - 2\times 3 = -3$; $-4 - 2\times 0 = -4$; $-2 - 2\times(-2) = 2$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par -1.

Transformation 5. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 2=-2$; $(-1)\times 3=-3$; $(-1)\times(-1)=1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 6. Pour annuler le 3 de L_3, on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $3-3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 1 \\ 0 & \textcircled{3} & -5 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3-3\times 1=0$; $-5-3\times(-2)=1$; $-7-3\times(-3)=2$; $4-3\times 1=1$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

Transformation 7. Pour annuler le 1 de L_4, on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_2 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $-3-1\times(-2)=-1$; $-4-1\times(-3)=-1$; $2-1\times 1=1$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 8. Pour annuler le -1 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_3 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4+L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $-1+1\times 2=1$; $1+1\times 1=2$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_3 ne sera plus utilisée.

Colonne 4. Il ne reste plus que la ligne L_4 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne 4 (coefficients de t) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Il n'y a plus de ligne sous L_4 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 4 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 4$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 4 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A) = 4$.

$$\text{rang}(A) = 4 \qquad \text{rang}(A|B) = 4$$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 4$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 4$ au nombre d'inconnues $m = 4$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 4 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{18} \text{ est compatible déterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_{18}$ est **compatible déterminé** : il admet **une solution unique**.

Corrigé de l'exercice 19

4 équations, 4 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_{19} : \begin{cases} 2x - 2y + 2z + 4t = 6 \\ 2x - 2y + z + 2t = 5 \\ -2x + y - 2z - 4t = -7 \\ -y - z - 2t = -2 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 4$ inconnues (x, y, z, t).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 4 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 4×4, le vecteur X de taille 4×1 et le vecteur B de taille 4×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -2 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2 = 1$; $\frac{1}{2}\times(-2) = -1$; $\frac{1}{2}\times 2 = 1$; $\frac{1}{2}\times 4 = 2$; $\frac{1}{2}\times 6 = 3$.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_2, on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2\times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \textcircled{2} & -2 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2\times 1 = 0$; $-2 - 2\times(-1) = 0$; $1 - 2\times 1 = -1$; $2 - 2\times 2 = -2$; $5 - 2\times 3 = -1$.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2\times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ \textcircled{-2} & 1 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2\times 1 = 0$; $1 + 2\times(-1) = -1$; $-2 + 2\times 1 = 0$; $-4 + 2\times 2 = 0$; $-7 + 2\times 3 = -1$.

Le coefficient de L_4 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_3 (coefficient -1). On échange donc L_2 et L_3. Échanger deux lignes revient simplement à changer l'ordre des équations : le système reste le même.

Transformation 4. Permutation des lignes L_2 et L_3.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par -1.

Transformation 5. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 0=0$; $(-1)\times 0=0$; $(-1)\times(-1)=1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 6. Pour annuler le -1 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4+L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $-1+1\times 0=-1$; $-2+1\times 0=-2$; $-2+1\times 1=-1$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par -1.

Transformation 7. Multiplication de L_3 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-2)=2$; $(-1)\times(-1)=1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 8. Pour annuler le -1 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_3 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4+L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $-2+1\times 2=0$; $-1+1\times 1=0$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_3 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. La ligne L_4 est entièrement nulle, second membre compris : elle correspond à l'équation $0=0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information. Elle ne peut plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 3 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A|B)=3$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 3 lignes non nulles, donc $\operatorname{rang}(A)=3$.

$\operatorname{rang}(A)=3$ $\operatorname{rang}(A|B)=3$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3$. Ils sont égaux, donc le système est **compatible** (il admet au moins une solution). On compare ensuite cette valeur commune $r = 3$ au nombre d'inconnues $m = 4$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 < m = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{19} \text{ est compatible indéterminé.}$$

Le système $\mathcal{S}_{19}$ est **compatible indéterminé** : il admet **une infinité de solutions**. Il n'y a que 3 équations « utiles » pour 4 inconnues : 1 inconnue peut être choisie librement.

Corrigé de l'exercice 20

4 équations, 4 inconnues

Rappelons le système dont on cherche le nombre de solutions :

$$\mathcal{S}_{20} : \begin{cases} 2y + 4z + 2t = -4 \\ x - 3y - 3z + 2t = -1 \\ 2y + 5z + 4t = -1 \\ -2x + 6y + 7z - 2t = 8 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 4$ inconnues (x, y, z, t).

Étape 1 Écriture matricielle $AX = B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 ; x n'apparaît pas dans l'équation 3 : les coefficients correspondants valent 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A (une ligne par équation, une colonne par inconnue), les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ -2 & 6 & 7 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}}_{B}$$

La matrice A est de taille 4×4, le vecteur X de taille 4×1 et le vecteur B de taille 4×1.

Étape 2 Matrice augmentée $A|B$

On joint le vecteur B à droite de la matrice A, en les séparant par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 4 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 7 & -2 & 8 \end{array}\right)$$

Chaque ligne de $A|B$ représente une équation du système : à gauche de la barre, ses coefficients ; à droite, son second membre.

Étape 3 Échelonnement de $A|B$ par l'algorithme de Gauss

On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée **tout entière** : les opérations portent sur toute la ligne, y compris le second membre situé à droite de la barre.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_2 (coefficient 1). On échange donc L_1 et L_2. Échanger deux lignes revient simplement à changer l'ordre des équations : le système reste le même.

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 4 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 7 & -2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 7 & -2 & 8 \end{array}\right)$$

Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ \textcircled{-2} & 6 & 7 & -2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $6+2\times(-3)=0$; $7+2\times(-3)=1$; $-2+2\times 2=2$; $8+2\times(-1)=6$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 4 = 2$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-4) = -2$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 4. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & -2 \\ 0 & \textcircled{2} & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $5 - 2 \times 2 = 1$; $4 - 2 \times 1 = 2$; $-1 - 2 \times (-2) = 3$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

Le coefficient de L_4 dans cette colonne est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 5. Pour annuler le 1 de L_4, on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $2 - 1 \times 2 = 0$; $6 - 1 \times 3 = 3$.

Cette colonne est terminée ; la ligne L_3 ne sera plus utilisée.

Colonne 4. Il ne reste plus que la ligne L_4 à traiter. Le coefficient de L_4 dans la colonne 4 (coefficients de t) vaut 0, et c'est aussi le cas de toutes les lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot** : on passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_4.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, la ligne L_4 ne contient plus que des zéros, mais son second membre n'est pas entièrement nul : le second membre 3 de L_4 traduit l'équation $0x + 0y + 0z + 0t = 3$, qui est **impossible**. On continue l'algorithme dans la colonne des constantes. Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut 3 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_4 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 6. Multiplication de L_4 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_4} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_4 : cette colonne est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Lecture des rangs

La forme échelonnée obtenue est notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

— $A_e|B_e$ (toute la matrice) contient 4 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A|B) = 4$;

— A_e (partie à gauche de la barre) contient 3 lignes non nulles, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$\text{rang}(A) = 3$ $\quad$ $\text{rang}(A|B) = 4$

Étape 4 Conclusion par le théorème de Rouché-Fontené

On compare les deux rangs : $\text{rang}(A) = 3 \neq \text{rang}(A|B) = 4$. Les deux rangs sont différents : la dernière ligne non nulle de $A_e|B_e$ n'a des coefficients non nuls qu'à droite de la barre, ce qui correspond à une équation impossible du type $0 = 1$.

$$\text{rang}(A) = 3 \neq \text{rang}(A|B) = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{20} \text{ est incompatible : } \mathbb{S} = \emptyset.$$

Le système $\mathcal{S}_{20}$ est **incompatible** : il n'admet **aucune solution**.

Bilan de la série

Les vingt exercices couvrent tous les cas prévus par le théorème de Rouché-Fontené, pour des systèmes carrés ($n = m$) comme rectangulaires ($n \neq m$).

Ce qu'il faut retenir

— On échelonne **une seule fois** la matrice augmentée $A|B$: on y lit à la fois $\text{rang}(A)$ (à gauche de la barre) et $\text{rang}(A|B)$ (toute la matrice).

— Une ligne de la forme $(0 \ \cdots \ 0 \mid d)$ avec $d \neq 0$ traduit l'équation impossible $0 = d$: les deux rangs diffèrent et le système est incompatible.

— Une ligne entièrement nulle $(0 \ \cdots \ 0 \mid 0)$ traduit l'équation $0 = 0$: l'équation correspondante est redondante.

— Le nombre d'équations n ne suffit pas à conclure : c'est le **rang** qui compte, comparé au nombre d'inconnues m.

Récapitulatif des résultats

Ex.	n	m	$\text{rang}(A)$	$\text{rang}(A\|B)$	Nature	Solutions
1	2	2	2	2	compatible déterminé	solution unique
2	2	2	1	2	incompatible	aucune solution
3	2	2	1	1	compatible indéterminé	infinité de solutions
4	2	3	2	2	compatible indéterminé	infinité de solutions
5	2	3	1	2	incompatible	aucune solution
6	3	3	3	3	compatible déterminé	solution unique
7	3	3	2	2	compatible indéterminé	infinité de solutions
8	3	3	2	3	incompatible	aucune solution
9	3	3	3	3	compatible déterminé	solution unique
10	3	3	2	2	compatible indéterminé	infinité de solutions
11	3	2	2	2	compatible déterminé	solution unique
12	3	2	2	3	incompatible	aucune solution
13	3	4	3	3	compatible indéterminé	infinité de solutions
14	3	4	2	3	incompatible	aucune solution
15	4	3	3	3	compatible déterminé	solution unique
16	4	3	3	4	incompatible	aucune solution
17	4	3	2	2	compatible indéterminé	infinité de solutions
18	4	4	4	4	compatible déterminé	solution unique
19	4	4	3	3	compatible indéterminé	infinité de solutions
20	4	4	3	4	incompatible	aucune solution

Partie 3 : Quand les calculs se compliquent, MATLAB

▶ Les limites du calcul à la main

Pour échelonner à la main une matrice de n lignes et n colonnes, il faut de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$ multiplications : environ 9 pour $n = 3$, 333 pour $n = 10$ et plus de 2 600 pour $n = 20$. Chacune peut être source d'erreur.

Pourquoi passer par un logiciel ?

— **Le calcul devient fastidieux** : le nombre d'opérations élémentaires augmente très vite avec la taille de la matrice.

— **Le risque d'erreur devient trop élevé** : une seule erreur de calcul se propage à toutes les transformations suivantes et fausse les rangs, donc la conclusion sur le nombre de solutions.

— **En gestion, les matrices sont grandes** : des dizaines de produits, de contraintes ou de centres d'analyse.

Dès que les choses commencent à se compliquer, il faut donc passer par un logiciel de calcul comme **MATLAB** (ou ses équivalents gratuits Octave et Python). Le rôle de l'étudiant reste essentiel : savoir **ce que l'on calcule** et **interpréter le résultat**.

▶ Les deux rangs avec MATLAB

La fonction `rank` donne le rang d'une matrice. La matrice augmentée $A|B$ s'écrit `[A B]` : on place B à droite de A. Le théorème de Rouché-Fontené s'applique ensuite exactement comme à la main.

Script MATLAB : nombre de solutions de trois systèmes de la série

```
% Exercice 6
A6 = [-2 6 2; -1 4 2; -1 2 -1];
B6 = [12; 7; 3];
rA6 = rank(A6)
rAB6 = rank([A6 B6])

% Exercice 7
A7 = [1 9 1; -1 -3 -1; -2 -4 -2];
B7 = [-8; 2; 2];
rA7 = rank(A7)
rAB7 = rank([A7 B7])

% Exercice 8
A8 = [-2 2 2; 0 -1 1; -6 7 5];
B8 = [0; 1; 1];
rA8 = rank(A8)
rAB8 = rank([A8 B8])
```

Résultat affiché par MATLAB

```
rA6 = 3
rAB6 = 3
```

```
rA7 = 2
rAB7 = 2
rA8 = 2
rAB8 = 3
```

Comment lire ce résultat

- Exercice 6 : $\text{rang}(A) = 3$ et $\text{rang}(A|B) = 3$, avec $m = 3$ inconnues : le système est compatible déterminé (une seule solution).
- Exercice 7 : $\text{rang}(A) = 2$ et $\text{rang}(A|B) = 2$, avec $m = 3$ inconnues : le système est compatible indéterminé (une infinité de solutions).
- Exercice 8 : $\text{rang}(A) = 2$ et $\text{rang}(A|B) = 3$, avec $m = 3$ inconnues : le système est incompatible (aucune solution).
- MATLAB donne les rangs ; c'est à nous d'appliquer le théorème de Rouché-Fontené et de conclure.