Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger

SÉRIE 2

SÉRIE D'EXERCICES CORRIGÉS

Le produit matriciel

Faisabilité et disposition de Falk

OBJECTIF

Vérifier qu'un produit de matrices est possible, prévoir la taille du résultat, puis le calculer pas à pas avec la disposition de Falk.

20 exercices progressifs | Corrigés détaillés pas à pas | Applications en gestion

AU SOMMAIRE

Partie 1 **Énoncés** rappels du cours et 20 exercices

Partie 2 **Corrigés détaillés** faisabilité, disposition de Falk et conclusion

Bilan **Ce qu'il faut retenir** et récapitulatif des résultats

Partie 3 **MATLAB** quand les calculs se compliquent

MODULE	PROFESSEUR	ANNÉE UNIVERSITAIRE
Mathématiques pour la gestion	**Jaouad Madkour**	**2026–2027**

Partie 1 : Énoncés

▶ Rappels du cours

La série 1 a présenté les matrices et les opérations de base, dont le produit scalaire de deux vecteurs. Il reste l'opération la plus importante : le produit de deux matrices, qui repose justement sur des produits scalaires « ligne par colonne ». C'est lui qui permettra d'écrire un système d'équations sous la forme compacte $AX = B$.

Avant d'aborder les exercices, rappelons la définition du produit matriciel, la condition pour qu'il existe, la disposition de Falk et les pièges à éviter.

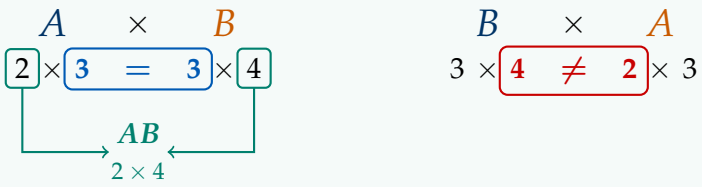
Le produit matriciel

Le produit d'une matrice A de taille $n \times p$ par une matrice B de taille $p \times q$ est une matrice de taille $n \times q$, notée AB ou $A \times B$. Le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j de AB, noté π_{ij}, s'obtient en multipliant la **ligne** i **de** A par la **colonne** j **de** B : on multiplie leurs nombres deux à deux, dans l'ordre, puis on additionne les résultats. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \times 4 + 3 \times 1 + (-1) \times 5 = 8 + 3 - 5 = 6.$$

Le produit est-il possible ? Le schéma des tailles

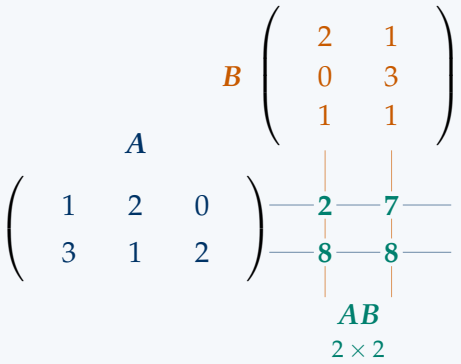
On écrit la taille de chaque matrice sous son nom. Le produit AB existe si et seulement si le **nombre de colonnes de** A est égal au **nombre de lignes de** B (dimensions intérieures). Les dimensions extérieures donnent alors la taille du résultat.



À gauche, $3 = 3$: le produit AB est possible et de taille 2×4. À droite, $4 \neq 2$: le produit BA est impossible, il n'y a rien à calculer.

La disposition de Falk

On place B **en haut à droite** et A **en bas à gauche**, puis on **prolonge les lignes de** A vers la droite et **les colonnes de** B vers le bas. Elles forment une **grille** qui a exactement la taille du produit donnée par le schéma des tailles : autant de lignes que A et autant de colonnes que B. Chaque case de la grille, au croisement d'une ligne de A et d'une colonne de B, reçoit le produit « ligne × colonne ».



ligne 1 de A × colonne 2 de B :

$\pi_{12} = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 1 = 1 + 6 + 0 = 7$

Les pièges du produit matriciel

1. **L'ordre compte** : en général, $AB \neq BA$. L'un des deux produits peut même exister sans l'autre.
2. **Un produit nul sans facteur nul** : on peut avoir $AB = O$ avec $A \neq O$ et $B \neq O$.
3. **On ne simplifie pas** : $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

Démarche à suivre pour chaque produit

1. **Faisabilité** : écrire les tailles et vérifier que le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde. Si ce n'est pas le cas, le produit est impossible et on s'arrête là.
2. **Disposition de Falk** : poser les deux matrices, prolonger les lignes de la première et les colonnes de la seconde pour former la grille du résultat, puis remplir chaque case par le produit « ligne × colonne ».
3. **Conclusion** : écrire le résultat sur une ligne et donner sa taille.

Consigne commune

Pour chaque exercice, effectuer les produits demandés en suivant les trois étapes de la démarche : faisabilité, disposition de Falk, conclusion. Lorsqu'un produit est impossible, le justifier sans effectuer de calcul.

▶ Les exercices

Exercice 1 : Ligne × colonne

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AB.

corrigé p. 8 →

Exercice 2 : Colonne × ligne

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AB.

corrigé p. 10 →

Exercice 3 : Matrice × vecteur colonne

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AX.

corrigé p. 11 →

Exercice 4 : Vecteur ligne × matrice

Soient les matrices :

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit YB.

corrigé p. 13 →

Exercice 5 : AB possible, BA possible ?

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer, lorsque c'est possible, les produits AB et BA.

corrigé p. 14 →

Exercice 6 : Deux produits de tailles différentes

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA.

corrigé p. 16 →

Exercice 7 : Même taille, résultats différents

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA, puis les comparer.

corrigé p. 19 →

Exercice 8 : Un seul des deux produits existe

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer, lorsque c'est possible, les produits AB et BA.

corrigé p. 22 →

Exercice 9 : Matrices carrées 2×2

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AB.

corrigé p. 25 →

Exercice 10 : Matrices 2×3 et 3×2

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AB.

corrigé p. 26 →

Exercice 11 : Matrices 3×2 et 2×3

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AB.

corrigé p. 28 →

Exercice 12 : Matrices carrées 3×3

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AB.

corrigé p. 29 →

Exercice 13 : La matrice identité

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits I_2A et AI_3.

corrigé p. 31 →

Exercice 14 : Une matrice diagonale

Soient les matrices :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits DA et AD, puis les comparer.

corrigé p. 33 →

Exercice 15 : Puissances d'une matrice

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^2 = A \times A$, puis $A^3 = A^2 \times A$.

corrigé p. 36 →

Exercice 16 : Deux pièges du produit

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Calculer AB et BA.
2) Calculer EF et EG, puis comparer F et G.

corrigé p. 39 →

Exercice 17 : Associativité : $(AB)C = A(BC)$

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $(AB)C$, puis $A(BC)$, et comparer.

corrigé p. 44 →

Exercice 18 : Associativité : choisir le bon ordre de calcul

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer $(AB)C$, puis $A(BC)$, et comparer.

corrigé p. 49 →

Exercice 19 : Chiffre d'affaires de deux magasins

Une enseigne de matériel de bureau possède deux magasins, à Tanger et à Tétouan. Elle vend trois produits : des cahiers, des classeurs et des calculatrices. La matrice Q donne les quantités vendues en une journée (une ligne par magasin, une colonne par produit) et la matrice P les prix unitaires de vente, en MAD (une ligne par produit) :

$$Q = \begin{pmatrix} 120 & 80 & 50 \\ 90 & 100 & 40 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le produit QP et interpréter le résultat.
2) Le produit PQ est-il possible ?

corrigé p. 54 →

Exercice 20 : Besoins en matières premières et coût de production

Un atelier de meubles fabrique des tables, des chaises et des armoires. Son programme de production de la semaine est donné par le vecteur ligne X (quantités de tables, de chaises et d'armoires). La matrice M indique la quantité de matières premières, en kg, nécessaire pour une unité de chaque produit (une ligne par produit ; colonnes : bois, puis métal). Le vecteur colonne P donne le prix d'achat d'un kg de chaque matière, en MAD (bois, puis métal) :

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

1) Calculer XM et interpréter le résultat.
2) Calculer $(XM)P$ et interpréter le résultat.
3) Calculer MP, interpréter, puis vérifier que $X(MP) = (XM)P$.

corrigé p. 56 →

Partie 2 : Corrigés détaillés

Conventions de lecture

— Dans le schéma des tailles, les dimensions intérieures sont encadrées ensemble : en **bleu** si elles sont égales, en **rouge** sinon. Les dimensions extérieures, en **vert**, donnent la taille du résultat.

— Dans la disposition de Falk, les coefficients de la matrice de gauche sont en **bleu foncé**, ceux de la matrice de droite en **orange** et ceux du résultat en **vert**.

— Le coefficient π_{ij} du résultat est situé à la ligne i et à la colonne j.

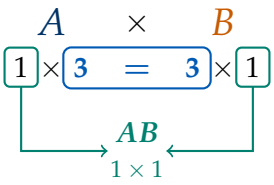
Corrigé de l'exercice 1 — AB

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Faisabilité du produit AB

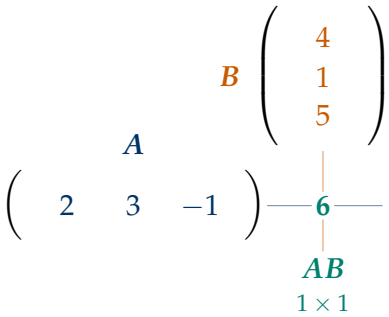
A est de taille 1×3 (1 ligne, 3 colonnes) et B est de taille 3×1 (3 lignes, 1 colonne). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (1) et autant de colonnes que B (1) : il est de taille 1×1.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 1 ligne et 1 colonne : c'est bien la taille 1×1 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de B.



Calcul de l'unique coefficient, ligne de A par colonne de B :

$$\pi_{11} = 2 \times 4 + 3 \times 1 + (-1) \times 5 = 8 + 3 - 5 = \mathbf{6}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 1×1.

Remarque

Le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne de même longueur est une matrice 1×1, c'est-à-dire un simple nombre : on retrouve le **produit scalaire** du cours, $A \cdot B = 2 \times 4 + 3 \times 1 + (-1) \times 5 = 6$.

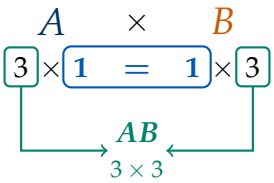
Corrigé de l'exercice 2 — AB

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Faisabilité du produit AB

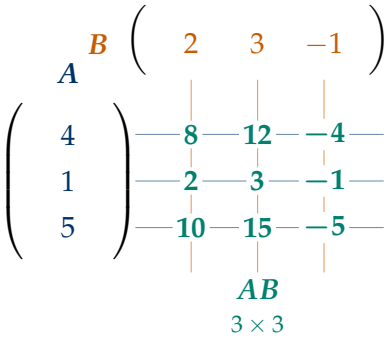
A est de taille 3×1 (3 lignes, 1 colonne) et B est de taille 1×3 (1 ligne, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($1 = 1$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (3) et autant de colonnes que B (3) : il est de taille 3×3.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 3 lignes et 3 colonnes : c'est bien la taille 3×3 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A × colonne j de B.



Calcul des 9 coefficients, ligne de A par colonne de B :

$$\pi_{11} = 4 \times 2 = \mathbf{8}$$
$$\pi_{12} = 4 \times 3 = \mathbf{12}$$
$$\pi_{13} = 4 \times (-1) = \mathbf{-4}$$
$$\pi_{21} = 1 \times 2 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{22} = 1 \times 3 = \mathbf{3}$$
$$\pi_{23} = 1 \times (-1) = \mathbf{-1}$$
$$\pi_{31} = 5 \times 2 = \mathbf{10}$$
$$\pi_{32} = 5 \times 3 = \mathbf{15}$$
$$\pi_{33} = 5 \times (-1) = \mathbf{-5}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 12 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 10 & 15 & -5 \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 3×3.

Remarque

Ce sont les mêmes nombres que dans l'exercice 1, mais dans l'ordre inverse (colonne, puis ligne). Le résultat n'est plus un nombre, mais une matrice 3×3 : **l'ordre des facteurs compte**.

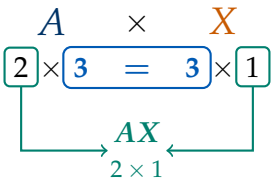
Corrigé de l'exercice 3 AX

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Faisabilité du produit AX

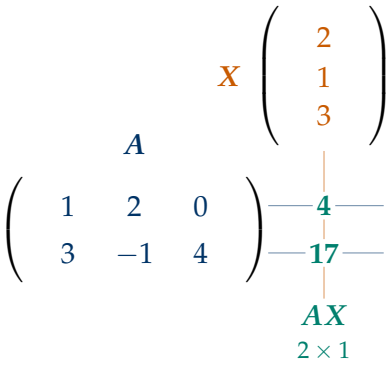
A est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes) et X est de taille 3×1 (3 lignes, 1 colonne). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de X :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de X ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat AX a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que X (1) : il est de taille 2×1.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place X en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de X vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 1 colonne : c'est bien la taille 2×1 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de X qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de X.



Calcul des 2 coefficients, ligne de A par colonne de X :

$$\pi_{11} = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 = 2 + 2 + 0 = \mathbf{4}$$
$$\pi_{21} = 3 \times 2 + (-1) \times 1 + 4 \times 3 = 6 - 1 + 12 = \mathbf{17}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}}_{AX}$$

AX est une matrice de taille 2×1.

Remarque

Une matrice multipliée par un vecteur colonne donne un vecteur colonne : chaque ligne de A fournit un seul nombre. C'est exactement l'écriture $AX = B$ d'un système linéaire, que l'on retrouvera au chapitre suivant.

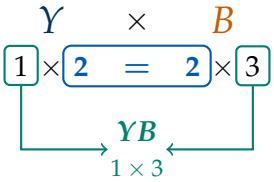
Corrigé de l'exercice 4 YB

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Faisabilité du produit YB

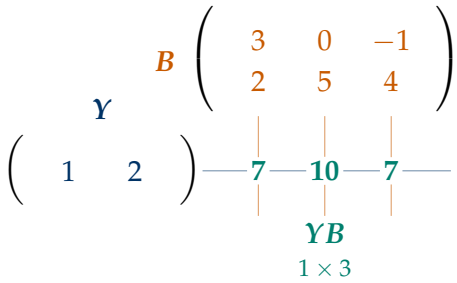
Y est de taille 1×2 (1 ligne, 2 colonnes) et B est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de Y au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de Y est égal au nombre de lignes de B ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat YB a autant de lignes que Y (1) et autant de colonnes que B (3) : il est de taille 1×3.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et Y en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de Y vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 1 ligne et 3 colonnes : c'est bien la taille 1×3 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de Y par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de Y × colonne j de B.



Calcul des 3 coefficients, ligne de Y par colonne de B :

$$\pi_{11} = 1 \times 3 + 2 \times 2 = 3 + 4 = \mathbf{7}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 0 + 2 \times 5 = 0 + 10 = \mathbf{10}$$
$$\pi_{13} = 1 \times (-1) + 2 \times 4 = -1 + 8 = \mathbf{7}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}}_{Y} \times \underbrace{\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 5 & 4\end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix}7 & 10 & 7\end{pmatrix}}_{YB}$$

YB est une matrice de taille 1×3.

Remarque

Un vecteur ligne multiplié par une matrice donne un vecteur ligne : chaque colonne de B fournit un seul nombre.

Corrigé de l'exercice 5 — AB et BA

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Produit AB

Étape 1 Faisabilité du produit AB

A est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes) et B est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :

$$\begin{array}{ccccc} A & & \times & & B \\ 2 \times & \boxed{3} & \neq & \boxed{2} & \times\ 2 \end{array}$$

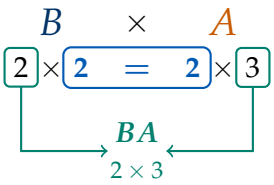
Le nombre de colonnes de A (3) est différent du nombre de lignes de B (2) : une ligne de A et une colonne de B n'ont pas le même nombre de coefficients, on ne peut donc pas les multiplier terme à terme.

Le produit AB est **impossible** : aucun calcul n'est à effectuer.

Produit BA

Étape 1 Faisabilité du produit BA

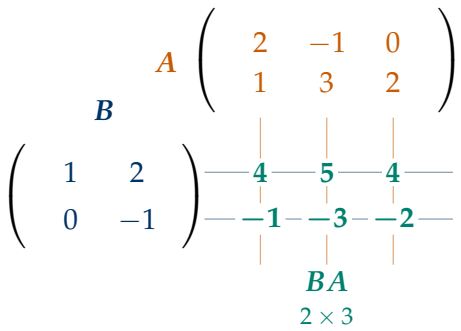
B est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et A est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de B au nombre de lignes de A :



Le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat BA a autant de lignes que B (2) et autant de colonnes que A (3) : il est de taille 2×3.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place A en haut à droite et B en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de B vers la droite et les colonnes de A vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 3 colonnes : c'est bien la taille 2×3 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de B par la colonne de A qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de B × colonne j de A.



Calcul des 6 coefficients, ligne de B par colonne de A :

$$\pi_{11} = 1 \times 2 + 2 \times 1 = 2 + 2 = \mathbf{4}$$
$$\pi_{12} = 1 \times (-1) + 2 \times 3 = -1 + 6 = \mathbf{5}$$
$$\pi_{13} = 1 \times 0 + 2 \times 2 = 0 + 4 = \mathbf{4}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 2 + (-1) \times 1 = 0 - 1 = \mathbf{-1}$$
$$\pi_{22} = 0 \times (-1) + (-1) \times 3 = 0 - 3 = \mathbf{-3}$$
$$\pi_{23} = 0 \times 0 + (-1) \times 2 = 0 - 2 = \mathbf{-2}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_{BA}$$

BA est une matrice de taille 2×3.

Remarque

Le produit BA existe alors que AB n'existe pas : avant tout calcul, il faut **toujours vérifier les tailles**, et dans le bon ordre.

Corrigé de l'exercice 6 — AB et BA

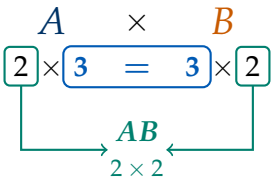
Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Produit AB

Étape 1 Faisabilité du produit AB

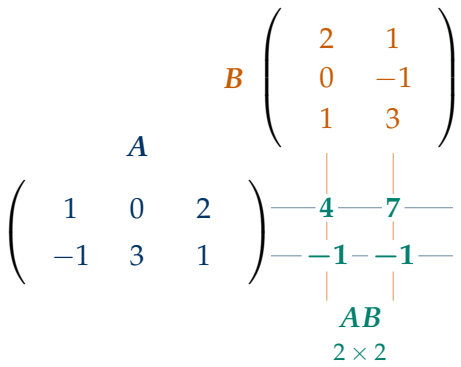
A est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes) et B est de taille 3×2 (3 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que B (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de B.



Calcul des 4 coefficients, ligne de A par colonne de B :

$$\pi_{11} = 1 \times 2 + 0 \times 0 + 2 \times 1 = 2 + 0 + 2 = \mathbf{4}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 1 + 0 \times (-1) + 2 \times 3 = 1 + 0 + 6 = \mathbf{7}$$
$$\pi_{21} = (-1) \times 2 + 3 \times 0 + 1 \times 1 = -2 + 0 + 1 = \mathbf{-1}$$
$$\pi_{22} = (-1) \times 1 + 3 \times (-1) + 1 \times 3 = -1 - 3 + 3 = \mathbf{-1}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

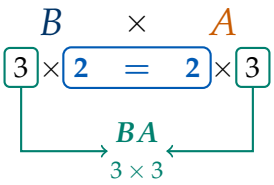
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 2×2.

Produit BA

Étape 1 Faisabilité du produit BA

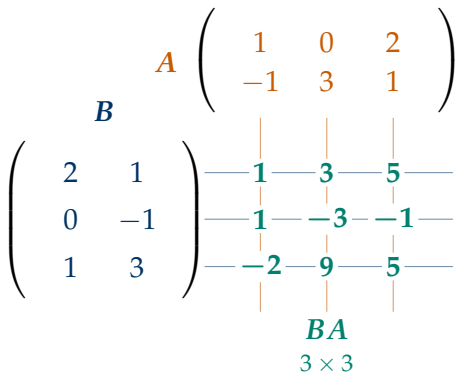
B est de taille 3×2 (3 lignes, 2 colonnes) et A est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de B au nombre de lignes de A :



Le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat BA a autant de lignes que B (3) et autant de colonnes que A (3) : il est de taille 3×3.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place A en haut à droite et B en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de B vers la droite et les colonnes de A vers le bas. On obtient une grille de 3 lignes et 3 colonnes : c'est bien la taille 3×3 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de B par la colonne de A qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de B × colonne j de A.



Calcul des 9 coefficients, ligne de B par colonne de A :

$$\pi_{11} = 2 \times 1 + 1 \times (-1) = 2 - 1 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = 2 \times 0 + 1 \times 3 = 0 + 3 = \mathbf{3}$$
$$\pi_{13} = 2 \times 2 + 1 \times 1 = 4 + 1 = \mathbf{5}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 1 + (-1) \times (-1) = 0 + 1 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{22} = 0 \times 0 + (-1) \times 3 = 0 - 3 = \mathbf{-3}$$
$$\pi_{23} = 0 \times 2 + (-1) \times 1 = 0 - 1 = \mathbf{-1}$$
$$\pi_{31} = 1 \times 1 + 3 \times (-1) = 1 - 3 = \mathbf{-2}$$
$$\pi_{32} = 1 \times 0 + 3 \times 3 = 0 + 9 = \mathbf{9}$$
$$\pi_{33} = 1 \times 2 + 3 \times 1 = 2 + 3 = \mathbf{5}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{B} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 9 & 5 \end{pmatrix}}_{BA}$$

BA est une matrice de taille 3×3.

Remarque

Les deux produits existent, mais AB est de taille 2×2 et BA de taille 3×3 : ils ne peuvent pas être égaux.

Corrigé de l'exercice 7 — AB et BA

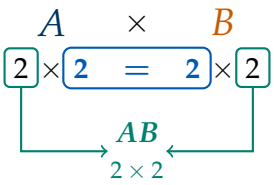
Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Produit AB

Étape 1 Faisabilité du produit AB

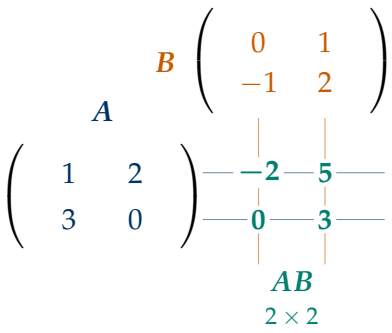
A est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et B est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que B (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de B.



Calcul des 4 coefficients, ligne de A par colonne de B :

$$\pi_{11} = 1 \times 0 + 2 \times (-1) = 0 - 2 = \mathbf{-2}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 1 + 2 \times 2 = 1 + 4 = \mathbf{5}$$
$$\pi_{21} = 3 \times 0 + 0 \times (-1) = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 3 \times 1 + 0 \times 2 = 3 + 0 = \mathbf{3}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

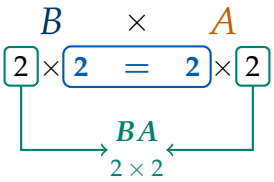
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 2×2.

Produit BA

Étape 1 Faisabilité du produit BA

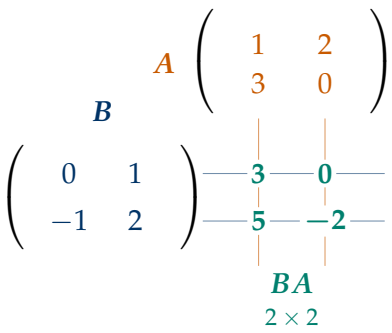
B est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et A est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de B au nombre de lignes de A :



Le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat BA a autant de lignes que B (2) et autant de colonnes que A (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place A en haut à droite et B en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de B vers la droite et les colonnes de A vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de B par la colonne de A qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de B × colonne j de A.



Calcul des 4 coefficients, ligne de B par colonne de A :

$$\pi_{11} = 0 \times 1 + 1 \times 3 = 0 + 3 = \mathbf{3}$$
$$\pi_{12} = 0 \times 2 + 1 \times 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = (-1) \times 1 + 2 \times 3 = -1 + 6 = \mathbf{5}$$
$$\pi_{22} = (-1) \times 2 + 2 \times 0 = -2 + 0 = \mathbf{-2}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{B} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}}_{BA}$$

BA est une matrice de taille 2×2.

Remarque

Les deux produits existent et ont la même taille, et pourtant $AB \neq BA$. Le produit matriciel **n'est pas commutatif** : en général, $AB \neq BA$.

Corrigé de l'exercice 8 — AB et BA

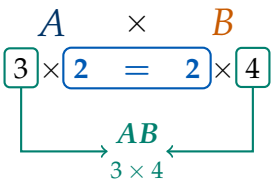
Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Produit AB

Étape 1 Faisabilité du produit AB

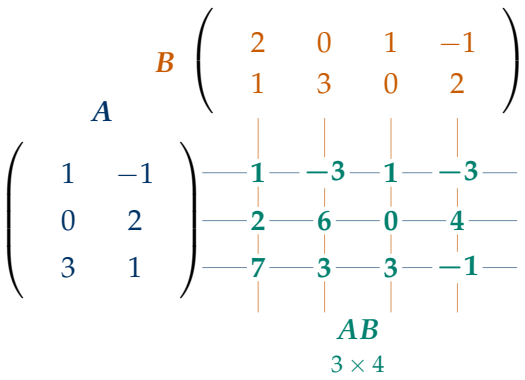
A est de taille 3×2 (3 lignes, 2 colonnes) et B est de taille 2×4 (2 lignes, 4 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (3) et autant de colonnes que B (4) : il est de taille 3×4.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 3 lignes et 4 colonnes : c'est bien la taille 3×4 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de B.



Calcul des 12 coefficients, ligne de A par colonne de B :

$$\pi_{11} = 1 \times 2 + (-1) \times 1 = 2 - 1 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 0 + (-1) \times 3 = 0 - 3 = \mathbf{-3}$$
$$\pi_{13} = 1 \times 1 + (-1) \times 0 = 1 + 0 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{14} = 1 \times (-1) + (-1) \times 2 = -1 - 2 = \mathbf{-3}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 2 + 2 \times 1 = 0 + 2 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{22} = 0 \times 0 + 2 \times 3 = 0 + 6 = \mathbf{6}$$
$$\pi_{23} = 0 \times 1 + 2 \times 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{24} = 0 \times (-1) + 2 \times 2 = 0 + 4 = \mathbf{4}$$
$$\pi_{31} = 3 \times 2 + 1 \times 1 = 6 + 1 = \mathbf{7}$$
$$\pi_{32} = 3 \times 0 + 1 \times 3 = 0 + 3 = \mathbf{3}$$
$$\pi_{33} = 3 \times 1 + 1 \times 0 = 3 + 0 = \mathbf{3}$$
$$\pi_{34} = 3 \times (-1) + 1 \times 2 = -3 + 2 = \mathbf{-1}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 3×4.

Produit BA

Étape 1 Faisabilité du produit BA

B est de taille 2×4 (2 lignes, 4 colonnes) et A est de taille 3×2 (3 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de B au nombre de lignes de A :

$$\begin{array}{ccccc} & B & & A & \\ 2 & \times & \boxed{4 \neq 3} & \times & 2 \end{array}$$

Le nombre de colonnes de B (4) est différent du nombre de lignes de A (3) : une ligne de B et une colonne de A n'ont pas le même nombre de coefficients, on ne peut donc pas les multiplier terme à terme.

Le produit BA est **impossible** : aucun calcul n'est à effectuer.

Remarque

Ici, c'est AB qui existe et BA qui est impossible : selon les tailles, l'un, l'autre, les deux ou aucun des deux produits peuvent exister.

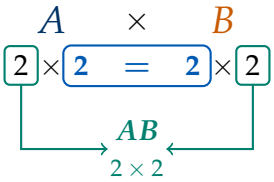
Corrigé de l'exercice 9 AB

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Faisabilité du produit AB

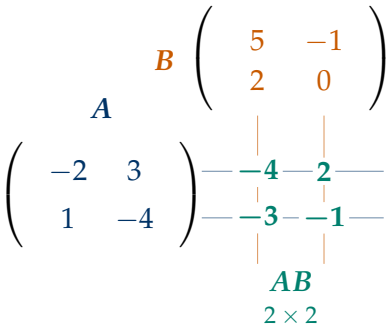
A est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et B est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que B (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A × colonne j de B.



Calcul des 4 coefficients, ligne de A par colonne de B :

$$\pi_{11} = (-2) \times 5 + 3 \times 2 = -10 + 6 = \mathbf{-4}$$
$$\pi_{12} = (-2) \times (-1) + 3 \times 0 = 2 + 0 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{21} = 1 \times 5 + (-4) \times 2 = 5 - 8 = \mathbf{-3}$$
$$\pi_{22} = 1 \times (-1) + (-4) \times 0 = -1 + 0 = \mathbf{-1}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 2×2.

Remarque

Attention aux signes : un produit de deux nombres négatifs est positif, par exemple $(-4) \times (-1) = 4$.

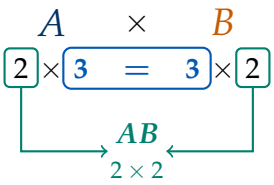
Corrigé de l'exercice 10 AB

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Faisabilité du produit AB

A est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes) et B est de taille 3×2 (3 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que B (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de B.

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{B} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{A} & \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \mathbf{11} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-14} & \mathbf{5} \end{matrix} \\ & \boldsymbol{AB} \\ & 2 \times 2 \end{array}$$

Calcul des 4 coefficients, ligne de A par colonne de B :

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= 3 \times 1 + (-2) \times (-3) + 1 \times 2 = 3 + 6 + 2 = \mathbf{11} \\ \pi_{12} &= 3 \times 2 + (-2) \times 0 + 1 \times (-5) = 6 + 0 - 5 = \mathbf{1} \\ \pi_{21} &= 0 \times 1 + 4 \times (-3) + (-1) \times 2 = 0 - 12 - 2 = \mathbf{-14} \\ \pi_{22} &= 0 \times 2 + 4 \times 0 + (-1) \times (-5) = 0 + 0 + 5 = \mathbf{5} \end{aligned}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-14} & \mathbf{5} \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 2×2.

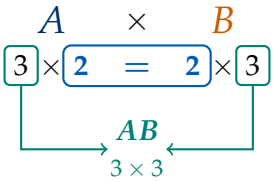
Corrigé de l'exercice 11 — AB

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Faisabilité du produit AB

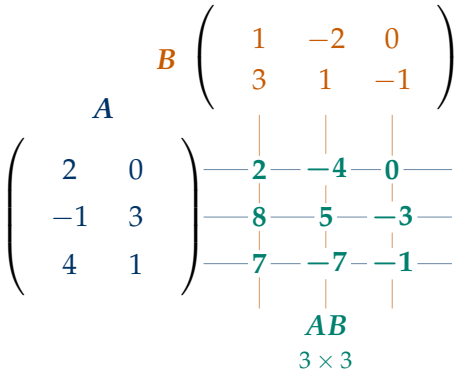
A est de taille 3×2 (3 lignes, 2 colonnes) et B est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (3) et autant de colonnes que B (3) : il est de taille 3×3.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 3 lignes et 3 colonnes : c'est bien la taille 3×3 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A × colonne j de B.



Calcul des 9 coefficients, ligne de A par colonne de B :

$$\pi_{11} = 2 \times 1 + 0 \times 3 = 2 + 0 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{12} = 2 \times (-2) + 0 \times 1 = -4 + 0 = \mathbf{-4}$$
$$\pi_{13} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = (-1) \times 1 + 3 \times 3 = -1 + 9 = \mathbf{8}$$
$$\pi_{22} = (-1) \times (-2) + 3 \times 1 = 2 + 3 = \mathbf{5}$$
$$\pi_{23} = (-1) \times 0 + 3 \times (-1) = 0 - 3 = \mathbf{-3}$$
$$\pi_{31} = 4 \times 1 + 1 \times 3 = 4 + 3 = \mathbf{7}$$
$$\pi_{32} = 4 \times (-2) + 1 \times 1 = -8 + 1 = \mathbf{-7}$$
$$\pi_{33} = 4 \times 0 + 1 \times (-1) = 0 - 1 = \mathbf{-1}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 8 & 5 & -3 \\ 7 & -7 & -1 \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 3×3.

Remarque

Le produit d'une matrice 3×2 par une matrice 2×3 est une matrice 3×3 : le résultat peut être plus grand que chacun des deux facteurs.

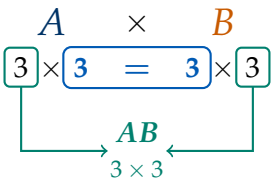
Corrigé de l'exercice 12 AB

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Faisabilité du produit AB

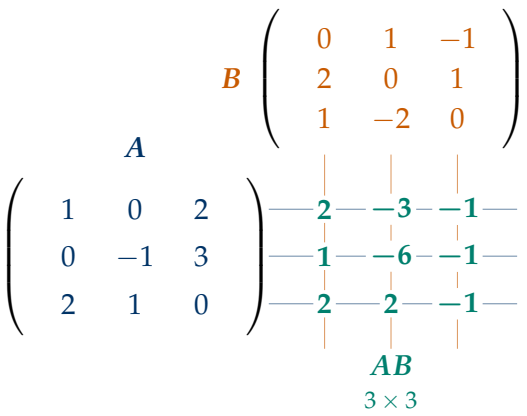
A est de taille 3×3 (3 lignes, 3 colonnes) et B est de taille 3×3 (3 lignes, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (3) et autant de colonnes que B (3) : il est de taille 3×3.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 3 lignes et 3 colonnes : c'est bien la taille 3×3 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de B.



Calcul des 9 coefficients, ligne de A par colonne de B :

$$\pi_{11} = 1\times 0 + 0\times 2 + 2\times 1 = 0+0+2 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{12} = 1\times 1 + 0\times 0 + 2\times (-2) = 1+0-4 = \mathbf{-3}$$
$$\pi_{13} = 1\times (-1) + 0\times 1 + 2\times 0 = -1+0+0 = \mathbf{-1}$$
$$\pi_{21} = 0\times 0 + (-1)\times 2 + 3\times 1 = 0-2+3 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{22} = 0\times 1 + (-1)\times 0 + 3\times (-2) = 0+0-6 = \mathbf{-6}$$
$$\pi_{23} = 0\times (-1) + (-1)\times 1 + 3\times 0 = 0-1+0 = \mathbf{-1}$$
$$\pi_{31} = 2\times 0 + 1\times 2 + 0\times 1 = 0+2+0 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{32} = 2\times 1 + 1\times 0 + 0\times (-2) = 2+0+0 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{33} = 2\times (-1) + 1\times 1 + 0\times 0 = -2+1+0 = \mathbf{-1}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-6} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 3×3.

Remarque

Les zéros simplifient les calculs : un terme dont l'un des facteurs est nul vaut 0, mais on l'écrit quand même pour ne pas se tromper de position.

Corrigé de l'exercice 13 — I_2A et AI_3

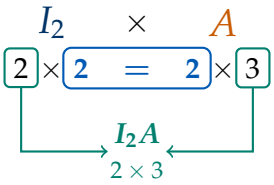
Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Produit I_2A

Étape 1 Faisabilité du produit I_2A

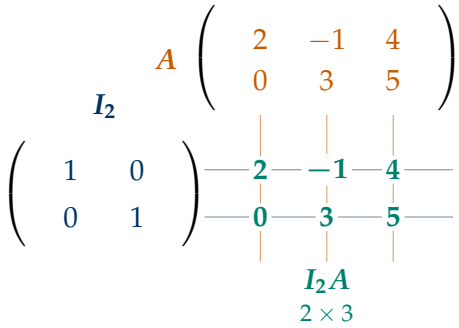
I_2 est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et A est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de I_2 au nombre de lignes de A :



Le nombre de colonnes de I_2 est égal au nombre de lignes de A ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat I_2A a autant de lignes que I_2 (2) et autant de colonnes que A (3) : il est de taille 2×3.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place A en haut à droite et I_2 en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de I_2 vers la droite et les colonnes de A vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 3 colonnes : c'est bien la taille 2×3 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de I_2 par la colonne de A qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de I_2 × colonne j de A.



Calcul des 6 coefficients, ligne de I_2 par colonne de A :

$$\pi_{11} = 1 \times 2 + 0 \times 0 = 2 + 0 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{12} = 1 \times (-1) + 0 \times 3 = -1 + 0 = \mathbf{-1}$$
$$\pi_{13} = 1 \times 4 + 0 \times 5 = 4 + 0 = \mathbf{4}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 2 + 1 \times 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 0 \times (-1) + 1 \times 3 = 0 + 3 = \mathbf{3}$$
$$\pi_{23} = 0 \times 4 + 1 \times 5 = 0 + 5 = \mathbf{5}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{pmatrix}}_{I_2 A}$$

$I_2 A$ est une matrice de taille 2×3.

Produit AI_3

Étape 1 Faisabilité du produit AI_3

A est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes) et I_3 est de taille 3×3 (3 lignes, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de I_3 :

$$\underset{}{A} \quad \times \quad \underset{}{I_3}$$
$$\boxed{2} \times \boxed{3 \;=\; 3} \times \boxed{3}$$
$$\underset{2 \times 3}{AI_3}$$

Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de I_3 ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat AI_3 a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que I_3 (3) : il est de taille 2×3.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place I_3 en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de I_3 vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 3 colonnes : c'est bien la taille 2×3 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de I_3 qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de I_3.

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{I_3} \\ \boldsymbol{A} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{ccc} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{array} \\ & \underset{2 \times 3}{\boldsymbol{AI_3}} \end{array}$$

Calcul des 6 coefficients, ligne de A par colonne de I_3 :

$$\pi_{11} = 2 \times 1 + (-1) \times 0 + 4 \times 0 = 2 + 0 + 0 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{12} = 2 \times 0 + (-1) \times 1 + 4 \times 0 = 0 - 1 + 0 = \mathbf{-1}$$
$$\pi_{13} = 2 \times 0 + (-1) \times 0 + 4 \times 1 = 0 + 0 + 4 = \mathbf{4}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 1 + 3 \times 0 + 5 \times 0 = 0 + 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 0 \times 0 + 3 \times 1 + 5 \times 0 = 0 + 3 + 0 = \mathbf{3}$$
$$\pi_{23} = 0 \times 0 + 3 \times 0 + 5 \times 1 = 0 + 0 + 5 = \mathbf{5}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{AI_3}$$

AI_3 est une matrice de taille 2×3.

Remarque

Multiplier par la matrice identité ne change rien : $I_2 A = AI_3 = A$. Mais attention à la taille de l'identité : à gauche de A (taille 2×3), il faut I_2 ; à droite, il faut I_3.

Corrigé de l'exercice 14 — DA et AD

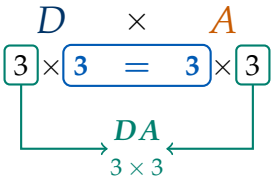
Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Produit DA

Étape 1 Faisabilité du produit DA

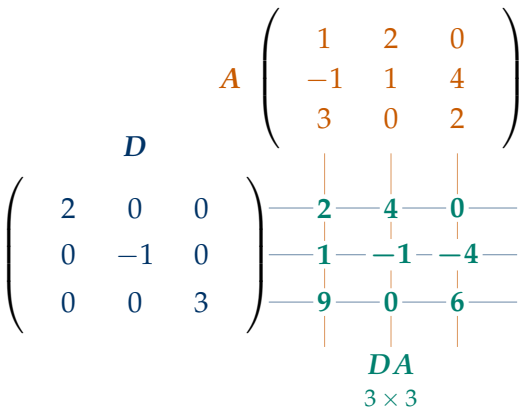
D est de taille 3×3 (3 lignes, 3 colonnes) et A est de taille 3×3 (3 lignes, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de D au nombre de lignes de A :



Le nombre de colonnes de D est égal au nombre de lignes de A ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat DA a autant de lignes que D (3) et autant de colonnes que A (3) : il est de taille 3×3.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place A en haut à droite et D en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de D vers la droite et les colonnes de A vers le bas. On obtient une grille de 3 lignes et 3 colonnes : c'est bien la taille 3×3 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de D par la colonne de A qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de D $\times$ colonne j de A.



Calcul des 9 coefficients, ligne de D par colonne de A :

$$\pi_{11} = 2 \times 1 + 0 \times (-1) + 0 \times 3 = 2 + 0 + 0 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{12} = 2 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 4 + 0 + 0 = \mathbf{4}$$
$$\pi_{13} = 2 \times 0 + 0 \times 4 + 0 \times 2 = 0 + 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 1 + (-1) \times (-1) + 0 \times 3 = 0 + 1 + 0 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{22} = 0 \times 2 + (-1) \times 1 + 0 \times 0 = 0 - 1 + 0 = \mathbf{-1}$$
$$\pi_{23} = 0 \times 0 + (-1) \times 4 + 0 \times 2 = 0 - 4 + 0 = \mathbf{-4}$$
$$\pi_{31} = 0 \times 1 + 0 \times (-1) + 3 \times 3 = 0 + 0 + 9 = \mathbf{9}$$
$$\pi_{32} = 0 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times 0 = 0 + 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{33} = 0 \times 0 + 0 \times 4 + 3 \times 2 = 0 + 0 + 6 = \mathbf{6}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

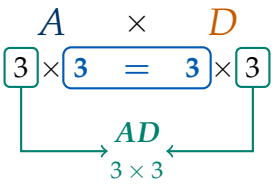
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{9} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{pmatrix}}_{DA}$$

DA est une matrice de taille 3×3.

Produit AD

Étape 1 Faisabilité du produit AD

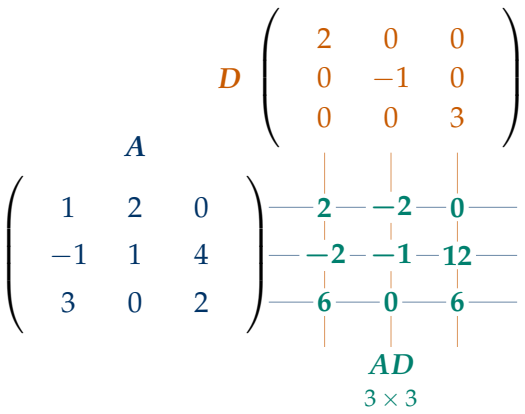
A est de taille 3×3 (3 lignes, 3 colonnes) et D est de taille 3×3 (3 lignes, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de D :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de D ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat AD a autant de lignes que A (3) et autant de colonnes que D (3) : il est de taille 3×3.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place D en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de D vers le bas. On obtient une grille de 3 lignes et 3 colonnes : c'est bien la taille 3×3 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de D qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A × colonne j de D.



Calcul des 9 coefficients, ligne de A par colonne de D :

$$\pi_{11} = 1 \times 2 + 2 \times 0 + 0 \times 0 = 2 + 0 + 0 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 0 + 2 \times (-1) + 0 \times 0 = 0 - 2 + 0 = \mathbf{-2}$$
$$\pi_{13} = 1 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 3 = 0 + 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = (-1) \times 2 + 1 \times 0 + 4 \times 0 = -2 + 0 + 0 = \mathbf{-2}$$
$$\pi_{22} = (-1) \times 0 + 1 \times (-1) + 4 \times 0 = 0 - 1 + 0 = \mathbf{-1}$$
$$\pi_{23} = (-1) \times 0 + 1 \times 0 + 4 \times 3 = 0 + 0 + 12 = \mathbf{12}$$
$$\pi_{31} = 3 \times 2 + 0 \times 0 + 2 \times 0 = 6 + 0 + 0 = \mathbf{6}$$
$$\pi_{32} = 3 \times 0 + 0 \times (-1) + 2 \times 0 = 0 + 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{33} = 3 \times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 3 = 0 + 0 + 6 = \mathbf{6}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{12} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{pmatrix}}_{AD}$$

AD est une matrice de taille 3×3.

Remarque

Multiplier **à gauche** par une matrice diagonale multiplie chaque **ligne** de A par le coefficient diagonal correspondant $(2, -1, 3)$; multiplier **à droite** multiplie chaque **colonne**. Les deux résultats sont différents.

Corrigé de l'exercice 15 — A^2 et A^3

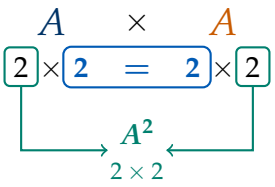
Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Produit A^2

Étape 1 Faisabilité du produit A^2

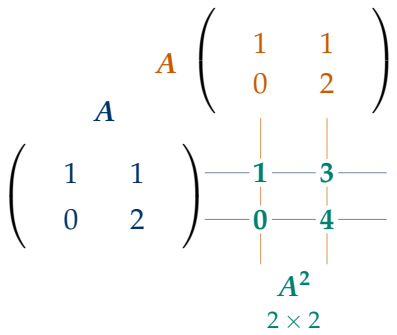
A est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et A est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de A :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de A $(2 = 2)$: le produit est **faisable**. Le résultat A^2 a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que A (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place A en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de A vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de A qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de A.



Calcul des 4 coefficients, ligne de A par colonne de A :

$$\pi_{11} = 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1 + 0 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 1 + 1 \times 2 = 1 + 2 = \mathbf{3}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 1 + 2 \times 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 0 \times 1 + 2 \times 2 = 0 + 4 = \mathbf{4}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

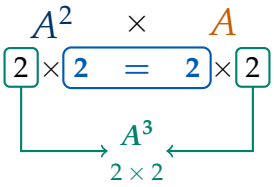
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}}_{A^2}$$

A^2 est une matrice de taille 2×2.

Produit A^3

Étape 1 Faisabilité du produit A^3

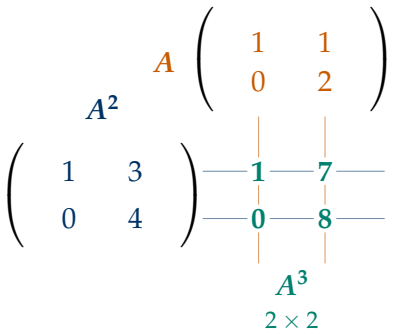
A^2 est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et A est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A^2 au nombre de lignes de A :



Le nombre de colonnes de A^2 est égal au nombre de lignes de A ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat A^3 a autant de lignes que A^2 (2) et autant de colonnes que A (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place A en haut à droite et A^2 en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A^2 vers la droite et les colonnes de A vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A^2 par la colonne de A qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A^2 $\times$ colonne j de A.



Calcul des 4 coefficients, ligne de A^2 par colonne de A :

$$\pi_{11} = 1 \times 1 + 3 \times 0 = 1 + 0 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 1 + 3 \times 2 = 1 + 6 = \mathbf{7}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 1 + 4 \times 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 0 \times 1 + 4 \times 2 = 0 + 8 = \mathbf{8}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A^2} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}_{A^3}$$

A^3 est une matrice de taille 2×2.

Remarque

Piège classique : A^2 **n'est pas** la matrice des carrés des coefficients. Les carrés des coefficients donneraient $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, alors que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 16 *AB, BA, EF, EG*

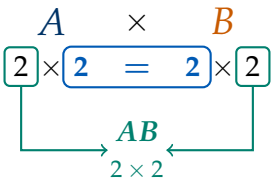
Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Produit AB

Étape 1 Faisabilité du produit AB

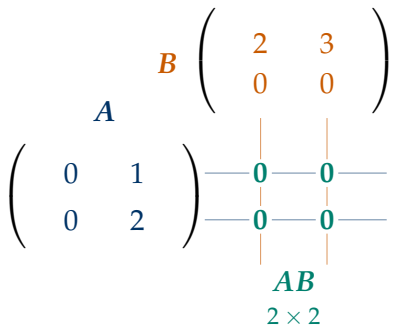
A est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et B est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que B (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de B.



Calcul des 4 coefficients, ligne de A par colonne de B :

$$\pi_{11} = 0 \times 2 + 1 \times 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{12} = 0 \times 3 + 1 \times 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 2 + 2 \times 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 0 \times 3 + 2 \times 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

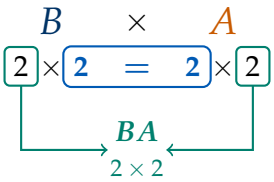
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 2×2.

Produit BA

Étape 1 Faisabilité du produit BA

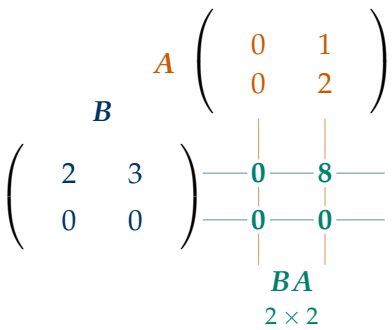
B est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et A est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de B au nombre de lignes de A :



Le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat BA a autant de lignes que B (2) et autant de colonnes que A (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place A en haut à droite et B en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de B vers la droite et les colonnes de A vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de B par la colonne de A qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de B × colonne j de A.



Calcul des 4 coefficients, ligne de B par colonne de A :

$$\pi_{11} = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{12} = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 2 + 6 = \mathbf{8}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 0 \times 1 + 0 \times 2 = 0 + 0 = \mathbf{0}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

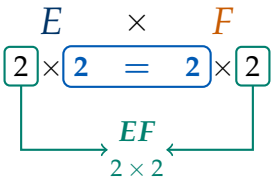
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{BA}$$

BA est une matrice de taille 2×2.

Produit EF

Étape 1 Faisabilité du produit EF

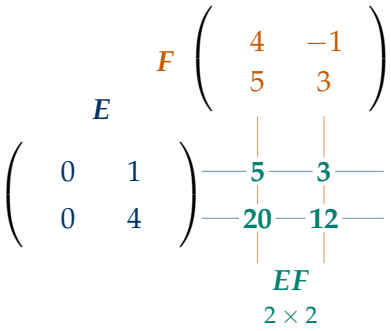
E est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et F est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de E au nombre de lignes de F :



Le nombre de colonnes de E est égal au nombre de lignes de F ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat EF a autant de lignes que E (2) et autant de colonnes que F (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place F en haut à droite et E en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de E vers la droite et les colonnes de F vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de E par la colonne de F qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de E × colonne j de F.



Calcul des 4 coefficients, ligne de E par colonne de F :

$$\pi_{11} = 0 \times 4 + 1 \times 5 = 0 + 5 = \mathbf{5}$$
$$\pi_{12} = 0 \times (-1) + 1 \times 3 = 0 + 3 = \mathbf{3}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 4 + 4 \times 5 = 0 + 20 = \mathbf{20}$$
$$\pi_{22} = 0 \times (-1) + 4 \times 3 = 0 + 12 = \mathbf{12}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{E} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}_{F} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{20} & \mathbf{12} \end{pmatrix}}_{EF}$$

EF est une matrice de taille 2×2.

Produit EG

Étape 1 Faisabilité du produit EG

E est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et G est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de E au nombre de lignes de G :

$$\begin{array}{ccccc} E & & \times & & G \\ \boxed{2} & \times & \boxed{\mathbf{2} \quad = \quad \mathbf{2}} & \times & \boxed{2} \end{array}$$

$$\underset{2 \times 2}{\boldsymbol{EG}}$$

Le nombre de colonnes de E est égal au nombre de lignes de G ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat EG a autant de lignes que E (2) et autant de colonnes que G (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place G en haut à droite et E en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de E vers la droite et les colonnes de G vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de E par la colonne de G qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de E $\times$ colonne j de G.

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{G} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{E} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{cc} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{20} & \mathbf{12} \end{array} \end{array}$$

$$\underset{2 \times 2}{\boldsymbol{EG}}$$

Calcul des 4 coefficients, ligne de E par colonne de G :

$$\pi_{11} = 0 \times 2 + 1 \times 5 = 0 + 5 = \mathbf{5}$$
$$\pi_{12} = 0 \times 5 + 1 \times 3 = 0 + 3 = \mathbf{3}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 2 + 4 \times 5 = 0 + 20 = \mathbf{20}$$
$$\pi_{22} = 0 \times 5 + 4 \times 3 = 0 + 12 = \mathbf{12}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{E} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}_{G} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 20 & 12 \end{pmatrix}}_{EG}$$

EG est une matrice de taille 2×2.

Remarque

Deux pièges à retenir. **(1)** AB est la matrice nulle alors que ni A ni B ne sont nulles : contrairement aux nombres, un produit peut être nul sans qu'aucun facteur ne le soit. **(2)** $EF = EG$ alors que $F \neq G$: on ne peut pas « simplifier » par E.

Corrigé de l'exercice 17 — $(AB)C$ et $A(BC)$

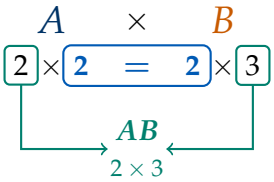
Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Produit AB

Étape 1 Faisabilité du produit AB

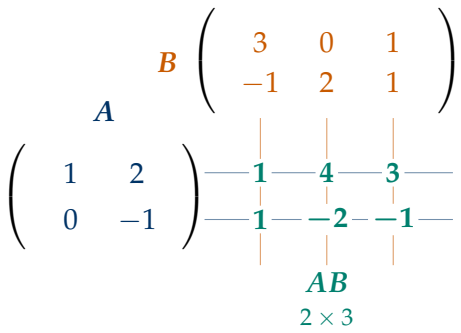
A est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et B est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :



Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que B (3) : il est de taille 2×3.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 3 colonnes : c'est bien la taille 2×3 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de B.



Calcul des 6 coefficients, ligne de A par colonne de B :

$$\pi_{11} = 1 \times 3 + 2 \times (-1) = 3 - 2 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 0 + 2 \times 2 = 0 + 4 = \mathbf{4}$$
$$\pi_{13} = 1 \times 1 + 2 \times 1 = 1 + 2 = \mathbf{3}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 3 + (-1) \times (-1) = 0 + 1 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{22} = 0 \times 0 + (-1) \times 2 = 0 - 2 = \mathbf{-2}$$
$$\pi_{23} = 0 \times 1 + (-1) \times 1 = 0 - 1 = \mathbf{-1}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

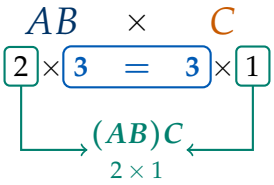
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 2×3.

Produit $(AB)C$

Étape 1 Faisabilité du produit $(AB)C$

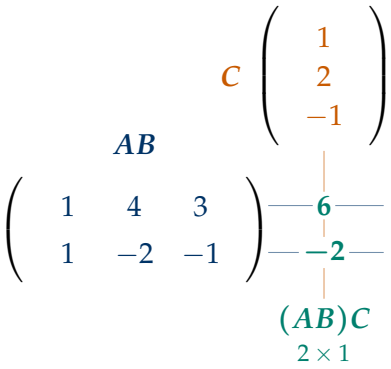
AB est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes) et C est de taille 3×1 (3 lignes, 1 colonne). On compare le nombre de colonnes de AB au nombre de lignes de C :



Le nombre de colonnes de AB est égal au nombre de lignes de C ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat $(AB)C$ a autant de lignes que AB (2) et autant de colonnes que C (1) : il est de taille 2×1.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place C en haut à droite et AB en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de AB vers la droite et les colonnes de C vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 1 colonne : c'est bien la taille 2×1 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de AB par la colonne de C qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de AB × colonne j de C.



Calcul des 2 coefficients, ligne de AB par colonne de C :

$$\pi_{11} = 1 \times 1 + 4 \times 2 + 3 \times (-1) = 1 + 8 - 3 = \mathbf{6}$$
$$\pi_{21} = 1 \times 1 + (-2) \times 2 + (-1) \times (-1) = 1 - 4 + 1 = \mathbf{-2}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

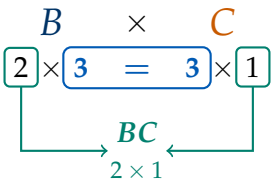
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{AB} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{(AB)C}$$

$(AB)C$ est une matrice de taille 2×1.

Produit BC

Étape 1 Faisabilité du produit BC

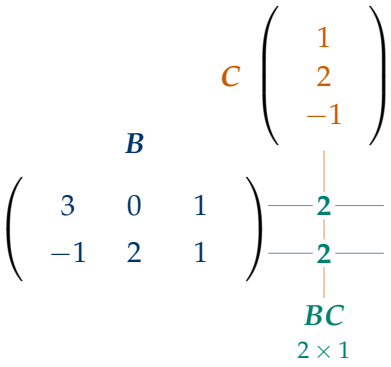
B est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes) et C est de taille 3×1 (3 lignes, 1 colonne). On compare le nombre de colonnes de B au nombre de lignes de C :



Le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de C ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat BC a autant de lignes que B (2) et autant de colonnes que C (1) : il est de taille 2×1.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place C en haut à droite et B en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de B vers la droite et les colonnes de C vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 1 colonne : c'est bien la taille 2×1 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de B par la colonne de C qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de B × colonne j de C.



Calcul des 2 coefficients, ligne de B par colonne de C :

$$\pi_{11} = 3 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times (-1) = 3 + 0 - 1 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{21} = (-1) \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times (-1) = -1 + 4 - 1 = \mathbf{2}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{BC}$$

BC est une matrice de taille 2×1.

Produit $A(BC)$

Étape 1 Faisabilité du produit $A(BC)$

A est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et BC est de taille 2×1 (2 lignes, 1 colonne). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de BC :

$$\begin{array}{ccc} A & \times & BC \\ \boxed{2} \times \boxed{2} & = & \boxed{2} \times \boxed{1} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & A(BC) & \\ & 2 \times 1 & \end{array}$$

Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de BC ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat $A(BC)$ a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que BC (1) : il est de taille 2×1.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place BC en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de BC vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 1 colonne : c'est bien la taille 2×1 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de BC qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de BC.

$$\begin{array}{cc} & BC \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ A & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 6 \\ -2 \end{matrix} \\ & A(BC) \\ & 2 \times 1 \end{array}$$

Calcul des 2 coefficients, ligne de A par colonne de BC :

$$\pi_{11} = 1 \times 2 + 2 \times 2 = 2 + 4 = \mathbf{6}$$
$$\pi_{21} = 0 \times 2 + (-1) \times 2 = 0 - 2 = \mathbf{-2}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{BC} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{A(BC)}$$

$A(BC)$ est une matrice de taille 2×1.

Remarque

On obtient le même résultat : le produit matriciel est **associatif**, $(AB)C = A(BC)$. On peut donc écrire ABC sans parenthèses, à condition de **ne pas changer l'ordre** des matrices.

Corrigé de l'exercice 18 — $(AB)C$ et $A(BC)$

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Produit AB

Étape 1 Faisabilité du produit AB

A est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes) et B est de taille 3×2 (3 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de B :

$$\underset{2\times 3}{A} \times \underset{3\times 2}{B}$$

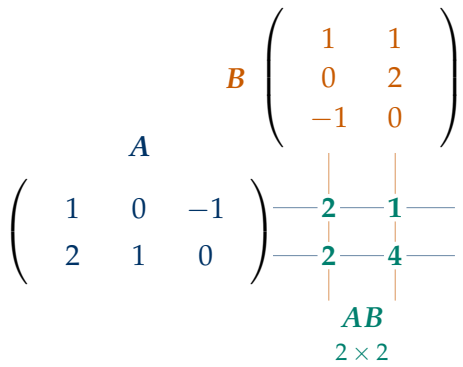
$$\boxed{2} \times \boxed{3} = \boxed{3} \times \boxed{2}$$

$$AB \quad 2 \times 2$$

Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat AB a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que B (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place B en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de B vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de B qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de B.



Calcul des 4 coefficients, ligne de A par colonne de B :

$$\pi_{11} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + (-1) \times (-1) = 1 + 0 + 1 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 1 + 0 \times 2 + (-1) \times 0 = 1 + 0 + 0 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{21} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times (-1) = 2 + 0 + 0 = \mathbf{2}$$
$$\pi_{22} = 2 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 0 = 2 + 2 + 0 = \mathbf{4}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

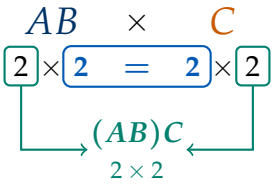
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{AB}$$

AB est une matrice de taille 2×2.

Produit $(AB)C$

Étape 1 Faisabilité du produit $(AB)C$

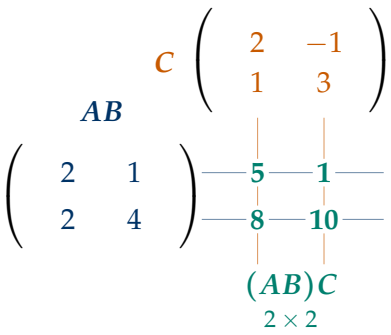
AB est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes) et C est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de AB au nombre de lignes de C :



Le nombre de colonnes de AB est égal au nombre de lignes de C ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat $(AB)C$ a autant de lignes que AB (2) et autant de colonnes que C (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place C en haut à droite et AB en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de AB vers la droite et les colonnes de C vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de AB par la colonne de C qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de AB $\times$ colonne j de C.



Calcul des 4 coefficients, ligne de AB par colonne de C :

$$\pi_{11} = 2 \times 2 + 1 \times 1 = 4 + 1 = \mathbf{5}$$
$$\pi_{12} = 2 \times (-1) + 1 \times 3 = -2 + 3 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{21} = 2 \times 2 + 4 \times 1 = 4 + 4 = \mathbf{8}$$
$$\pi_{22} = 2 \times (-1) + 4 \times 3 = -2 + 12 = \mathbf{10}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{AB} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{10} \end{pmatrix}}_{(AB)C}$$

$(AB)C$ est une matrice de taille 2×2.

Produit BC

Étape 1 Faisabilité du produit BC

B est de taille 3×2 (3 lignes, 2 colonnes) et C est de taille 2×2 (2 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de B au nombre de lignes de C :

$$\begin{array}{ccccc} B & & \times & & C \\ \boxed{3} & \times & \boxed{2 \quad = \quad 2} & \times & \boxed{2} \\ & & \underset{3 \times 2}{BC} & & \end{array}$$

Le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de C ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat BC a autant de lignes que B (3) et autant de colonnes que C (2) : il est de taille 3×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place C en haut à droite et B en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de B vers la droite et les colonnes de C vers le bas. On obtient une grille de 3 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 3×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de B par la colonne de C qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de B $\times$ colonne j de C.

$$\begin{array}{cc} & C \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ B & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{cc} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{array} \\ & \underset{3 \times 2}{BC} \end{array}$$

Calcul des 6 coefficients, ligne de B par colonne de C :

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= 1 \times 2 + 1 \times 1 = 2 + 1 = \mathbf{3} \\
\pi_{12} &= 1 \times (-1) + 1 \times 3 = -1 + 3 = \mathbf{2} \\
\pi_{21} &= 0 \times 2 + 2 \times 1 = 0 + 2 = \mathbf{2} \\
\pi_{22} &= 0 \times (-1) + 2 \times 3 = 0 + 6 = \mathbf{6} \\
\pi_{31} &= (-1) \times 2 + 0 \times 1 = -2 + 0 = \mathbf{-2} \\
\pi_{32} &= (-1) \times (-1) + 0 \times 3 = 1 + 0 = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{BC}$$

BC est une matrice de taille 3×2.

Produit $A(BC)$

Étape 1 Faisabilité du produit $A(BC)$

A est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes) et BC est de taille 3×2 (3 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de A au nombre de lignes de BC :

$$\underset{\boxed{2}\times\boxed{3}}{A} \times \underset{\boxed{3}\times\boxed{2}}{BC} \quad (3 = 3)$$

$$A(BC) \quad 2 \times 2$$

Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de BC ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat $A(BC)$ a autant de lignes que A (2) et autant de colonnes que BC (2) : il est de taille 2×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place BC en haut à droite et A en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de A vers la droite et les colonnes de BC vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 2 colonnes : c'est bien la taille 2×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de A par la colonne de BC qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de A $\times$ colonne j de BC.

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{BC} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{A} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 & 1 \\ 8 & 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$A(BC) \quad 2 \times 2$$

Calcul des 4 coefficients, ligne de A par colonne de BC :

$$\pi_{11} = 1 \times 3 + 0 \times 2 + (-1) \times (-2) = 3 + 0 + 2 = \mathbf{5}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 2 + 0 \times 6 + (-1) \times 1 = 2 + 0 - 1 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{21} = 2 \times 3 + 1 \times 2 + 0 \times (-2) = 6 + 2 + 0 = \mathbf{8}$$
$$\pi_{22} = 2 \times 2 + 1 \times 6 + 0 \times 1 = 4 + 6 + 0 = \mathbf{10}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{BC} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}}_{A(BC)}$$

$A(BC)$ est une matrice de taille 2×2.

Remarque

Même résultat par les deux chemins. Le premier chemin demande ici moins de calculs : AB n'est que 2×2, alors que BC est 3×2. Quand on peut choisir, on commence par le produit qui donne la matrice la plus petite.

Corrigé de l'exercice 19 — QP et PQ

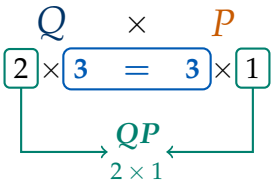
Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$Q = \begin{pmatrix} 120 & 80 & 50 \\ 90 & 100 & 40 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Produit QP

Étape 1 Faisabilité du produit QP

Q est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes) et P est de taille 3×1 (3 lignes, 1 colonne). On compare le nombre de colonnes de Q au nombre de lignes de P :



Le nombre de colonnes de Q est égal au nombre de lignes de P ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat QP a autant de lignes que Q (2) et autant de colonnes que P (1) : il est de taille 2×1.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place P en haut à droite et Q en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de Q vers la droite et les colonnes de P vers le bas. On obtient une grille de 2 lignes et 1 colonne : c'est bien la taille 2×1 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de Q par la colonne de P qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de Q $\times$ colonne j de P.

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{P} \\ & \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{Q} & \\ \begin{pmatrix} 120 & 80 & 50 \\ 90 & 100 & 40 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{9200} \\ \boldsymbol{8650} \end{matrix} \\ & \boldsymbol{QP} \\ & 2 \times 1 \end{array}$$

Calcul des 2 coefficients, ligne de Q par colonne de P :

$$\pi_{11} = 120 \times 25 + 80 \times 40 + 50 \times 60 = 3000 + 3200 + 3000 = \mathbf{9200}$$
$$\pi_{21} = 90 \times 25 + 100 \times 40 + 40 \times 60 = 2250 + 4000 + 2400 = \mathbf{8650}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 120 & 80 & 50 \\ 90 & 100 & 40 \end{pmatrix}}_{Q} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{9200} \\ \mathbf{8650} \end{pmatrix}}_{QP}$$

QP est une matrice de taille 2×1.

Produit PQ

Étape 1 Faisabilité du produit PQ

P est de taille 3×1 (3 lignes, 1 colonne) et Q est de taille 2×3 (2 lignes, 3 colonnes). On compare le nombre de colonnes de P au nombre de lignes de Q :

$$\begin{array}{ccccc} P & & \times & & Q \\ 3 & \times & \boxed{1 \quad \neq \quad 2} & \times & 3 \end{array}$$

Le nombre de colonnes de P (1) est différent du nombre de lignes de Q (2) : une ligne de P et une colonne de Q n'ont pas le même nombre de coefficients, on ne peut donc pas les multiplier terme à terme.

Le produit PQ est **impossible** : aucun calcul n'est à effectuer.

Remarque

Interprétation. Le coefficient de la ligne i de QP est la somme, pour les trois produits, des quantités vendues par le magasin i multipliées par leur prix unitaire : c'est le **chiffre d'affaires** du magasin. Le magasin de Tanger réalise 9 200 MAD et celui de Tétouan 8 650 MAD. Le produit PQ n'existe pas : **en gestion aussi, l'ordre a un sens** ; on multiplie les quantités (lignes : magasins) par les prix (colonne : prix par produit).

Corrigé de l'exercice 20 — XM, $(XM)P$, MP

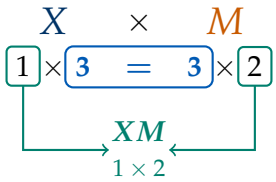
Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Produit XM

Étape 1 Faisabilité du produit XM

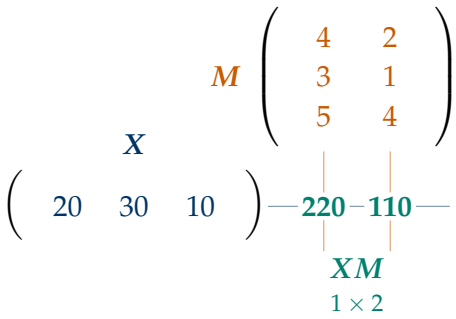
X est de taille 1×3 (1 ligne, 3 colonnes) et M est de taille 3×2 (3 lignes, 2 colonnes). On compare le nombre de colonnes de X au nombre de lignes de M :



Le nombre de colonnes de X est égal au nombre de lignes de M ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat XM a autant de lignes que X (1) et autant de colonnes que M (2) : il est de taille 1×2.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place M en haut à droite et X en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de X vers la droite et les colonnes de M vers le bas. On obtient une grille de 1 ligne et 2 colonnes : c'est bien la taille 1×2 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de X par la colonne de M qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de X × colonne j de M.



Calcul des 2 coefficients, ligne de X par colonne de M :

$$\pi_{11} = 20 \times 4 + 30 \times 3 + 10 \times 5 = 80 + 90 + 50 = \mathbf{220}$$
$$\pi_{12} = 20 \times 2 + 30 \times 1 + 10 \times 4 = 40 + 30 + 40 = \mathbf{110}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \end{pmatrix}}_{X} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{220} & \mathbf{110} \end{pmatrix}}_{XM}$$

XM est une matrice de taille 1×2.

Produit $(XM)P$

Étape 1 Faisabilité du produit $(XM)P$

XM est de taille 1×2 (1 ligne, 2 colonnes) et P est de taille 2×1 (2 lignes, 1 colonne). On compare le nombre de colonnes de XM au nombre de lignes de P :

$$\begin{array}{ccccc} XM & \times & P & & \\ \boxed{1} & \times & \boxed{2 \quad = \quad 2} & \times & \boxed{1} \\ & & \underset{1 \times 1}{(XM)P} & & \end{array}$$

Le nombre de colonnes de XM est égal au nombre de lignes de P ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat $(XM)P$ a autant de lignes que XM (1) et autant de colonnes que P (1) : il est de taille 1×1.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place P en haut à droite et XM en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de XM vers la droite et les colonnes de P vers le bas. On obtient une grille de 1 ligne et 1 colonne : c'est bien la taille 1×1 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de XM par la colonne de P qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de XM $\times$ colonne j de P.

$$\begin{array}{cc} & P \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} \\ XM & \\ \begin{pmatrix} 220 & 110 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ -\mathbf{12\,100}- \\ \\ \end{array} \\ & \underset{1 \times 1}{(XM)P} \end{array}$$

Calcul de l'unique coefficient, ligne de XM par colonne de P :

$$\pi_{11} = 220 \times 30 + 110 \times 50 = 6600 + 5500 = \mathbf{12\,100}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

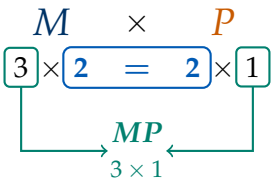
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 220 & 110 \end{pmatrix}}_{XM} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{12\,100} \end{pmatrix}}_{(XM)P}$$

$(XM)P$ est une matrice de taille 1×1.

Produit MP

Étape 1 Faisabilité du produit MP

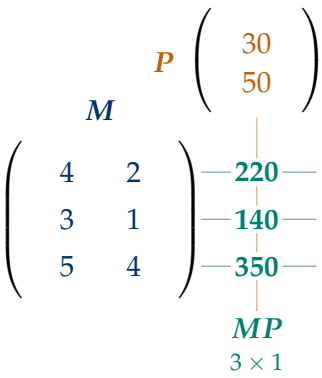
M est de taille 3×2 (3 lignes, 2 colonnes) et P est de taille 2×1 (2 lignes, 1 colonne). On compare le nombre de colonnes de M au nombre de lignes de P :



Le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de P ($2 = 2$) : le produit est **faisable**. Le résultat MP a autant de lignes que M (3) et autant de colonnes que P (1) : il est de taille 3×1.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place P en haut à droite et M en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de M vers la droite et les colonnes de P vers le bas. On obtient une grille de 3 lignes et 1 colonne : c'est bien la taille 3×1 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de M par la colonne de P qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de M × colonne j de P.



Calcul des 3 coefficients, ligne de M par colonne de P :

$$\pi_{11} = 4 \times 30 + 2 \times 50 = 120 + 100 = \mathbf{220}$$
$$\pi_{21} = 3 \times 30 + 1 \times 50 = 90 + 50 = \mathbf{140}$$
$$\pi_{31} = 5 \times 30 + 4 \times 50 = 150 + 200 = \mathbf{350}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}_{M} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{220} \\ \mathbf{140} \\ \mathbf{350} \end{pmatrix}}_{MP}$$

MP est une matrice de taille 3×1.

Produit $X(MP)$

Étape 1 Faisabilité du produit $X(MP)$

X est de taille 1×3 (1 ligne, 3 colonnes) et MP est de taille 3×1 (3 lignes, 1 colonne). On compare le nombre de colonnes de X au nombre de lignes de MP :

$$\begin{array}{ccccc} & X & \times & MP & \\ \boxed{1} & \times & \boxed{3 \quad = \quad 3} & \times & \boxed{1} \\ & & \underset{1 \times 1}{\boldsymbol{X(MP)}} & & \end{array}$$

Le nombre de colonnes de X est égal au nombre de lignes de MP ($3 = 3$) : le produit est **faisable**. Le résultat $X(MP)$ a autant de lignes que X (1) et autant de colonnes que MP (1) : il est de taille 1×1.

Étape 2 Calcul par la disposition de Falk

On place MP en haut à droite et X en bas à gauche, puis on prolonge les lignes de X vers la droite et les colonnes de MP vers le bas. On obtient une grille de 1 ligne et 1 colonne : c'est bien la taille 1×1 trouvée à l'étape 1. Chaque case de la grille reçoit le produit de la ligne de X par la colonne de MP qui s'y croisent : π_{ij} = ligne i de X $\times$ colonne j de MP.

$$\begin{array}{ccc} & & \boldsymbol{MP} \begin{pmatrix} 220 \\ 140 \\ 350 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{X} & \\ \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \end{pmatrix} & & \mathbf{12\,100} \\ & & \underset{1 \times 1}{\boldsymbol{X(MP)}} \end{array}$$

Calcul de l'unique coefficient, ligne de X par colonne de MP :

$$\pi_{11} = 20 \times 220 + 30 \times 140 + 10 \times 350 = 4400 + 4200 + 3500 = \mathbf{12\,100}$$

Étape 3 Conclusion

Le résultat sur une ligne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}20 & 30 & 10\end{pmatrix}}_{X} \times \underbrace{\begin{pmatrix}220\\140\\350\end{pmatrix}}_{MP} = \underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{12\,100}\end{pmatrix}}_{X(MP)}$$

$X(MP)$ est une matrice de taille 1×1.

Remarque

Interprétation. $XM = (220 \;\; 110)$: pour réaliser ce programme, l'atelier a besoin de 220 kg de bois et de 110 kg de métal. $(XM)P = (12\,100)$: ces matières coûtent au total 12 100 MAD. MP donne le coût des matières pour **une unité** de chaque produit (220 MAD pour une table, 140 MAD pour une chaise, 350 MAD pour une armoire). On retrouve le même coût total par les deux chemins, grâce à l'associativité.

Bilan de la série

Ce qu'il faut retenir

1. **Vérifier** : nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B. La taille de AB est donnée par les dimensions extérieures.
2. **Poser** la disposition de Falk : B en haut à droite, A en bas à gauche, puis prolonger les lignes de A et les colonnes de B : la grille obtenue a la taille de AB.
3. **Remplir** : chaque case = ligne $\times$ colonne.

— $AB \neq BA$ en général ; $AB = O$ est possible sans que A ou B soit nulle ; $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

— La matrice identité ne change rien : $I_n A = A I_p = A$.

— Le produit est associatif : $(AB)C = A(BC)$, sans jamais changer l'ordre des matrices.

Récapitulatif des résultats

Ex.	Thème	Produits et tailles
1	Ligne $\times$ colonne	$AB : 1 \times 1$
2	Colonne $\times$ ligne	$AB : 3 \times 3$
3	Matrice $\times$ vecteur colonne	$AX : 2 \times 1$
4	Vecteur ligne $\times$ matrice	$YB : 1 \times 3$
5	AB possible, BA possible ?	AB : impossible ; $BA : 2 \times 3$
6	Deux produits de tailles différentes	$AB : 2 \times 2$; $BA : 3 \times 3$
7	Même taille, résultats différents	$AB : 2 \times 2$; $BA : 2 \times 2$
8	Un seul des deux produits existe	$AB : 3 \times 4$; BA : impossible
9	Matrices carrées 2×2	$AB : 2 \times 2$
10	Matrices 2×3 et 3×2	$AB : 2 \times 2$
11	Matrices 3×2 et 2×3	$AB : 3 \times 3$
12	Matrices carrées 3×3	$AB : 3 \times 3$
13	La matrice identité	$I_2A : 2 \times 3$; $AI_3 : 2 \times 3$
14	Une matrice diagonale	$DA : 3 \times 3$; $AD : 3 \times 3$
15	Puissances d'une matrice	$A^2 : 2 \times 2$; $A^3 : 2 \times 2$
16	Deux pièges du produit	$AB : 2 \times 2$; $BA : 2 \times 2$; $EF : 2 \times 2$; $EG : 2 \times 2$
17	Associativité : $(AB)C = A(BC)$	$AB : 2 \times 3$; $(AB)C : 2 \times 1$; $BC : 2 \times 1$; $A(BC) : 2 \times 1$
18	Associativité : choisir le bon ordre de calcul	$AB : 2 \times 2$; $(AB)C : 2 \times 2$; $BC : 3 \times 2$; $A(BC) : 2 \times 2$
19	Chiffre d'affaires de deux magasins	$QP : 2 \times 1$; PQ : impossible
20	Besoins en matières premières et coût de production	$XM : 1 \times 2$; $(XM)P : 1 \times 1$; $MP : 3 \times 1$; $X(MP) : 1 \times 1$

Partie 3 : Quand les calculs se compliquent, MATLAB

► Les limites du calcul à la main

Pour calculer à la main le produit de deux matrices carrées d'ordre n, il faut calculer $n \times n$ coefficients, chacun demandant n multiplications : 8 multiplications pour l'ordre 2, 27 pour l'ordre 3, 1 000 pour l'ordre 10 et 8 000 pour l'ordre 20.

Pourquoi passer par un logiciel ?

— **Le calcul devient fastidieux** dès que les matrices dépassent quelques lignes et quelques colonnes, ou que l'on enchaîne plusieurs produits.

— **Le risque d'erreur devient trop élevé** : une seule erreur dans une case fausse le résultat, et la décision de gestion qui en découle.

— **En gestion, les matrices sont grandes** : des dizaines de produits, de magasins ou de matières premières.

Dès que les choses commencent à se compliquer, il faut donc passer par un logiciel de calcul comme **MATLAB** (ou ses équivalents gratuits Octave et Python). Le rôle de l'étudiant reste essentiel : vérifier que le produit a un sens, **dans le bon ordre**, et interpréter le résultat.

► Calculer un produit matriciel avec MATLAB

On écrit chaque matrice ligne par ligne, entre crochets, en séparant les lignes par un point-virgule. Le produit matriciel s'écrit avec l'étoile `*`, et la fonction `size` donne la taille.

Script MATLAB : quelques produits de la série

```
% Exercice 5 : A de taille 2x3, B de taille 2x2
A = [2 -1 0; 1 3 2];
B = [1 2; 0 -1];
size(A)
size(B)
BA = B*A            % possible : (2x2)(2x3) donne 2x3
% A*B               % impossible : MATLAB affiche une erreur

% Exercice 15 : puissance d'une matrice (notée E ici)
E = [1 1; 0 2];
E2 = E^2            % produit matriciel E*E
E2bis = E.^2        % attention : carré de chaque coefficient

% Exercice 20 : coût total des matières premières
X = [20 30 10];
M = [4 2; 3 1; 5 4];
P = [30; 50];
cout = X*M*P
```

Résultat affiché par MATLAB

```
ans =
     2     3

ans =
     2     2

BA =
     4     5     4
    -1    -3    -2

E2 =
     1     3
     0     4

E2bis =
     1     1
     0     4

cout = 12100
```

Comment lire ce résultat

— `size(A)` donne 2 lignes et 3 colonnes, `size(B)` 2 lignes et 2 colonnes : on vérifie la faisabilité exactement comme avec le schéma des tailles.

— On retrouve BA de l'exercice 5, A^2 de l'exercice 15 (notée E dans le script) et le coût total de 12 100 MAD de l'exercice 20.

— Si l'on demande `A*B`, MATLAB refuse le calcul et affiche un message d'erreur (*Incorrect dimensions for matrix multiplication*) : les dimensions intérieures sont différentes ($3 \neq 2$).

— **Piège** : `E^2` est le produit matriciel $E \times E$, alors que `E.^2` élève chaque coefficient au carré. C'est exactement le piège de l'exercice 15.