Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger

SÉRIE 4

SÉRIE D'EXERCICES CORRIGÉS

L'inverse d'une matrice

Matrice adjointe et méthode de Gauss-Jordan

OBJECTIF

Savoir si une matrice carrée est inversible, calculer sa matrice inverse par chacune des méthodes du cours, puis vérifier le résultat avec la disposition de Falk.

15 exercices progressifs | Corrigés détaillés pas à pas | Vérification systématique

AU SOMMAIRE

Partie 1 **Énoncés** rappels du cours et 15 exercices

Partie 2 **Corrigés détaillés** inversibilité, calcul de l'inverse et vérification

Bilan **Ce qu'il faut retenir** et récapitulatif des résultats

Partie 3 **MATLAB** quand les calculs se compliquent

MODULE	PROFESSEUR	ANNÉE UNIVERSITAIRE
Mathématiques pour la gestion	**Jaouad Madkour**	**2026–2027**

Partie 1 : Énoncés

▶ Rappels du cours

La série 3 a établi qu'une matrice carrée est inversible lorsque son déterminant n'est pas nul. Cette série calcule son inverse, grâce aux cofacteurs de la série 3 ou à la méthode de Gauss-Jordan, puis le vérifie par le produit matriciel de la série 2. L'inverse servira à résoudre des systèmes dans la série 9.

Avant d'aborder les exercices, rappelons ce qu'est la matrice inverse, quand elle existe, comment la calculer et comment vérifier le résultat.

Matrice inverse : définition et existence

Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice carrée A^{-1} de même ordre telle que

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n.$$

— Si $\det(A) \neq 0$, la matrice A est **inversible** (régulière).

— Si $\det(A) = 0$, la matrice A est **singulière** : A^{-1} n'existe pas.

D'après le cours, si $A \times B = I_n$, alors automatiquement $B \times A = I_n$: pour vérifier qu'une matrice B est l'inverse de A, il suffit de vérifier **un seul** des deux produits.

Matrice des cofacteurs, matrice adjointe et inverse

1. Calculer $\det(A)$. S'il est nul, A n'est pas inversible : on s'arrête.
2. La **matrice des cofacteurs** A^c s'obtient en remplaçant chaque coefficient a_{ij} par son cofacteur $c_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det(A_{ij})$.
3. La **matrice adjointe** est sa transposée : $A^a = (A^c)^\top$ (les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a).
4. L'inverse s'obtient en divisant la matrice adjointe par le déterminant : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A^a$.

Cas d'une matrice d'ordre 2. En supprimant une ligne et une colonne, il ne reste qu'un seul nombre. Or le déterminant d'une matrice qui ne contient qu'une ligne et une colonne, c'est-à-dire d'un seul nombre, est égal à ce nombre : par exemple, $\det(-5) = -5$. Exemple du cours :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 3 \times 3 - 4 \times 2 = 1 \implies A^c = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\implies A^a = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{1} A^a = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Gauss-Jordan

On écrit A à gauche et la matrice identité I_n à droite. Par des opérations élémentaires, une seule à la fois, on transforme la partie gauche en I_n : une **descente** (pivots ramenés à 1, zéros au-dessous), puis une **remontée** (zéros au-dessus des pivots). La partie droite devient alors A^{-1} :

$$(A \mid I_n) \xrightarrow{\text{descente, puis remontée}} (I_n \mid A^{-1}).$$

Si une **ligne nulle** apparaît dans la partie gauche, la matrice A n'est pas inversible.

Vérifier le résultat

Si la matrice trouvée est vraiment l'inverse de A, alors son produit matriciel avec A est égal à la matrice identité :

$$A \times A^{-1} = I_n.$$

Consigne commune

Pour chaque exercice, étudier d'abord l'inversibilité de la matrice, calculer ensuite A^{-1} par la méthode demandée en détaillant chaque étape, puis vérifier le résultat par la disposition de Falk.

▶ Les exercices

Exercice 1 : Ordre 2, coefficients positifs

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$, puis A^{-1} par la méthode des cofacteurs (matrice des cofacteurs A^c, puis matrice adjointe A^a), et vérifier le résultat par la disposition de Falk. corrigé p. 7 →

Exercice 2 : Ordre 2, coefficients négatifs

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$, puis A^{-1} par la méthode des cofacteurs (matrice des cofacteurs A^c, puis matrice adjointe A^a), et vérifier le résultat par la disposition de Falk. corrigé p. 9 →

Exercice 3 : Ordre 2, coefficients fractionnaires

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$, puis A^{-1} par la méthode des cofacteurs (matrice des cofacteurs A^c, puis matrice adjointe A^a), et vérifier le résultat par la disposition de Falk. corrigé p. 11 →

Exercice 4 : Ordre 2, une matrice singulière

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}. corrigé p. 13 →

Exercice 5 : Méthode des cofacteurs

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$, puis, si A est inversible, calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs (matrice des cofacteurs A^c, puis matrice adjointe A^a). Vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$. corrigé p. 13 →

Exercice 6 : Méthode des cofacteurs, avec des zéros et des négatifs

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$, puis, si A est inversible, calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs (matrice des cofacteurs A^c, puis matrice adjointe A^a). Vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$.

corrigé p. 16 →

Exercice 7 : Méthode des cofacteurs, un cas plus difficile

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$, puis, si A est inversible, calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs (matrice des cofacteurs A^c, puis matrice adjointe A^a). Vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$.

corrigé p. 19 →

Exercice 8 : Méthode des cofacteurs, une matrice singulière

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$, puis, si A est inversible, calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs (matrice des cofacteurs A^c, puis matrice adjointe A^a). Vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$.

corrigé p. 21 →

Exercice 9 : Méthode de Gauss-Jordan

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan, en partant de $(A \mid I_3)$, puis vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$.

corrigé p. 22 →

Exercice 10 : Méthode de Gauss-Jordan, avec un pivot nul

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan, en partant de $(A \mid I_3)$, puis vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$.

corrigé p. 26 →

Exercice 11 : Méthode de Gauss-Jordan, avec des zéros

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan, en partant de $(A \mid I_3)$, puis vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$.

corrigé p. 29 →

Exercice 12 : Méthode de Gauss-Jordan, une matrice singulière

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle inversible ? Appliquer la méthode de Gauss-Jordan à $(A \mid I_3)$ pour répondre.

corrigé p. 33 →

Exercice 13 : Comparaison des deux méthodes

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs, puis par la méthode de Gauss-Jordan. Vérifier le résultat par la disposition de Falk et comparer les deux méthodes.

corrigé p. 34 →

Exercice 14 : Une matrice avec un paramètre

Soit $A = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, où m est un nombre réel.

1) Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle inversible ?
2) Pour $m = 1$, calculer A^{-1} et vérifier le résultat par la disposition de Falk.

corrigé p. 39 →

Exercice 15 : Application : résoudre un système grâce à l'inverse

La menuiserie **Atlas Bois** (Tanger) fabrique des tables (x), des chaises (y) et des armoires (z). Chaque meuble passe par trois ateliers, dont les capacités hebdomadaires sont de 110, 180 et 80 heures. Pour utiliser entièrement ces capacités, il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 110 \\ 3x + 2y + 4z = 180 \\ x + y + 2z = 80 \end{cases}$$

1) Écrire le système sous la forme $AX = B$.
2) Calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs et vérifier que $A \times A^{-1} = I_3$.
3) En déduire $X = A^{-1}B$ et interpréter.

corrigé p. 41 →

Partie 2 : Corrigés détaillés

Conventions de lecture

— Gauss-Jordan : les lignes sont notées L_1, L_2, L_3 selon leur position dans la matrice *actuelle* ; au-dessus de chaque flèche figure la transformation, en dessous le code de l'opération (O_1, O_2 ou O_3). Le pivot en cours est encadré en bleu (1) et le nombre à annuler entouré en orange (-2).

— Disposition de Falk : la matrice de gauche est en bas à gauche, celle de droite en haut à droite, et le produit au croisement de leurs lignes et colonnes prolongées.

Corrigé de l'exercice 1 — ordre 2

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Inversibilité : calcul du déterminant

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - 3 \times 3 = 10 - 9 = 1$$

$\det(A) = 1 \neq 0$: la matrice A est **inversible**.

Étape 2 Matrice des cofacteurs, matrice adjointe et inverse

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j : il ne reste qu'**un seul nombre**. Le déterminant d'une matrice qui ne contient qu'une ligne et une colonne est égal à ce nombre ; on applique ensuite le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\left(\begin{smallmatrix} + & - \\ - & + \end{smallmatrix}\right)$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(2) = +2 = 2 \qquad \text{(on supprime la ligne 1 et la colonne 1 : } \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 \end{pmatrix})$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(3) = -3 = -3 \qquad \text{(on supprime la ligne 1 et la colonne 2 : } \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot \end{pmatrix})$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \times \det(3) = -3 = -3 \qquad \text{(on supprime la ligne 2 et la colonne 1 : } \begin{pmatrix} \cdot & 3 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix})$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \times \det(5) = +5 = 5 \qquad \text{(on supprime la ligne 2 et la colonne 2 : } \begin{pmatrix} 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix})$$

$$A^c = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

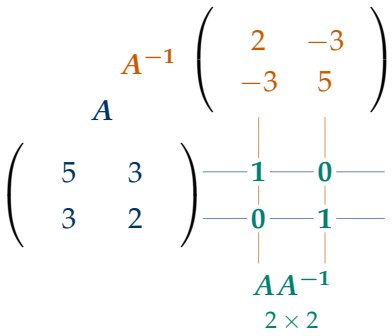
La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs (les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a), et l'inverse s'obtient en la divisant par $\det(A)$:

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Étape 3 Vérification par la disposition de Falk

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 5 \times 2 + 3 \times (-3) = 10 - 9 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = 5 \times (-3) + 3 \times 5 = -15 + 15 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = 3 \times 2 + 2 \times (-3) = 6 - 6 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 3 \times (-3) + 2 \times 5 = -9 + 10 = \mathbf{1}$$

On obtient bien la matrice identité I_2 : $A \times A^{-1} = I_2$.

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Remarque

Pour vérifier le résultat, il suffit de calculer le produit dans un seul sens : d'après le cours, si $A \times A^{-1} = I_2$, alors automatiquement $A^{-1} \times A = I_2$.

Corrigé de l'exercice 2 ordre 2

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Inversibilité : calcul du déterminant

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \times (-4) - 3 \times 1 = 8 - 3 = 5$$

$\det(A) = 5 \neq 0$: la matrice A est **inversible**.

Étape 2 Matrice des cofacteurs, matrice adjointe et inverse

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j : il ne reste qu'**un seul nombre**. Le déterminant d'une matrice qui ne contient qu'une ligne et une colonne est égal à ce nombre ; on applique ensuite le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\left(\begin{smallmatrix} + & - \\ - & + \end{smallmatrix}\right)$:

$c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(-4) = +(-4) = -4$ (on supprime la ligne 1 et la colonne 1 : $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & -4 \end{pmatrix}$)

$c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(1) = -1 = -1$ (on supprime la ligne 1 et la colonne 2 : $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$)

$c_{21} = (-1)^{2+1} \times \det(3) = -3 = -3$ (on supprime la ligne 2 et la colonne 1 : $\begin{pmatrix} \cdot & 3 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$)

$c_{22} = (-1)^{2+2} \times \det(-2) = +(-2) = -2$ (on supprime la ligne 2 et la colonne 2 : $\begin{pmatrix} -2 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$)

$$A^c = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

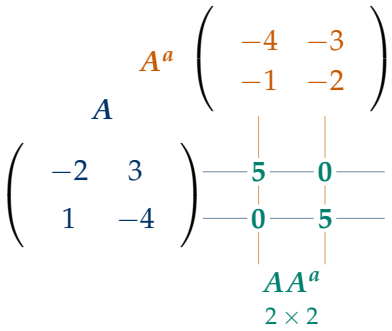
La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs (les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a), et l'inverse s'obtient en la divisant par $\det(A)$:

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Étape 3 Vérification par la disposition de Falk

Pour éviter de calculer avec des fractions, on met le facteur $\frac{1}{5}$ en avant : $A \times A^{-1} = \frac{1}{5}(A \times A^a)$. On calcule d'abord $A \times A^a$ par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = (-2) \times (-4) + 3 \times (-1) = 8 - 3 = \mathbf{5}$$
$$\pi_{12} = (-2) \times (-3) + 3 \times (-2) = 6 - 6 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = 1 \times (-4) + (-4) \times (-1) = -4 + 4 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) = -3 + 8 = \mathbf{5}$$

On obtient $A \times A^a = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5\,I_2$, d'où

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{5} \times \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient bien la matrice identité I_2 : $A \times A^{-1} = I_2$.

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Remarque

Lorsque l'inverse contient des fractions, on garde le facteur $\frac{1}{\det(A)}$ devant la matrice adjointe pendant la vérification : on calcule avec des nombres entiers, et on divise à la fin.

Corrigé de l'exercice 3 ordre 2

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Inversibilité : calcul du déterminant

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 1 - 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$\det(A) = \frac{1}{4} \neq 0$: la matrice A est **inversible**.

Étape 2 Matrice des cofacteurs, matrice adjointe et inverse

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j : il ne reste qu'**un seul nombre**. Le déterminant d'une matrice qui ne contient qu'une ligne et une colonne est égal à ce nombre ; on applique ensuite le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\left(\begin{smallmatrix} + & - \\ - & + \end{smallmatrix}\right)$:

$c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(1) = +1 = 1$ (on supprime la ligne 1 et la colonne 1 : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$)

$c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ (on supprime la ligne 1 et la colonne 2 : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$)

$c_{21} = (-1)^{2+1} \times \det(1) = -1 = -1$ (on supprime la ligne 2 et la colonne 1 : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$)

$c_{22} = (-1)^{2+2} \times \det(\frac{1}{2}) = +\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (on supprime la ligne 2 et la colonne 2 : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$)

$$A^c = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

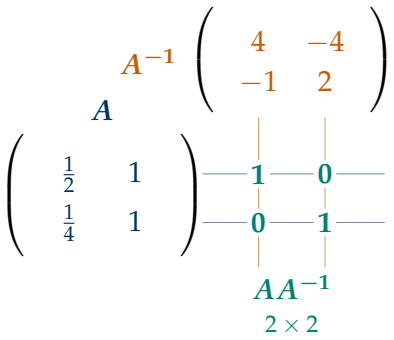
La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs (les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a), et l'inverse s'obtient en la divisant par $\det(A)$:

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Étape 3 Vérification par la disposition de Falk

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = \tfrac{1}{2} \times 4 + 1 \times (-1) = 2 - 1 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = \tfrac{1}{2} \times (-4) + 1 \times 2 = -2 + 2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = \tfrac{1}{4} \times 4 + 1 \times (-1) = 1 - 1 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = \tfrac{1}{4} \times (-4) + 1 \times 2 = -1 + 2 = \mathbf{1}$$

On obtient bien la matrice identité I_2 : $A \times A^{-1} = I_2$.

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque

Une matrice à coefficients fractionnaires peut avoir un inverse à coefficients entiers : tout dépend du déterminant.

Corrigé de l'exercice 4 ordre 2

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Inversibilité : calcul du déterminant

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$$

$\det(A) = 0$: la matrice A est **singulière** (non inversible). La matrice A^{-1} n'existe pas : le calcul s'arrête ici.

Remarque

La première ligne de A est le double de la deuxième : le déterminant est nul et A n'a pas d'inverse.

Corrigé de l'exercice 5 cofacteurs

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Inversibilité : calcul du déterminant

On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = (1+2+0) - (0+0+0) = 3 - 0 \ = \ 3$$

$\det(A) = 3 \neq 0$: la matrice A est **inversible**.

Étape 2 Les neuf cofacteurs et la matrice des cofacteurs A^c

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j de A, on calcule le mineur obtenu, puis on applique le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +(1\times 1 - 1\times 0) = +(1-0) = 1$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0\times 1 - 1\times 1) = -(0-1) = -(-1) = 1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +(0\times 0 - 1\times 1) = +(0-1) = +(-1) = -1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2\times 1 - 0\times 0) = -(2-0) = -2$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(1\times 1 - 0\times 1) = +(1-0) = 1$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1\times 0 - 2\times 1) = -(0-2) = -(-2) = 2$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(2\times 1 - 0\times 1) = +(2-0) = 2$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1\times 1 - 0\times 0) = -(1-0) = -1$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +(1\times 1 - 2\times 0) = +(1-0) = 1$$

Contrôle. En développant selon la ligne 1, on retrouve le déterminant : $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 1\times 1 + 2\times 1 + 0\times(-1) = 3$.

On range chaque cofacteur à la place du coefficient correspondant :

$$A^c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 3 Matrice adjointe A^a et matrice inverse A^{-1}

La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs : les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a.

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Étape 4 Vérification par la disposition de Falk

Pour éviter de calculer avec des fractions, on met le facteur $\frac{1}{3}$ en avant : $A \times A^{-1} = \frac{1}{3}(A \times A^a)$. On calcule d'abord $A \times A^a$ par la disposition de Falk :

		A^a		
		1	-2	2
		1	1	-1
A		-1	2	1
1	2	0	**3**	**0**	**0**
0	1	1	**0**	**3**	**0**
1	0	1	**0**	**0**	**3**

AA^a 3×3

Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= 1\times 1 + 2\times 1 + 0\times(-1) = 1+2+0 = \mathbf{3} \\
\pi_{12} &= 1\times(-2) + 2\times 1 + 0\times 2 = -2+2+0 = \mathbf{0} \\
\pi_{13} &= 1\times 2 + 2\times(-1) + 0\times 1 = 2-2+0 = \mathbf{0} \\
\pi_{21} &= 0\times 1 + 1\times 1 + 1\times(-1) = 0+1-1 = \mathbf{0} \\
\pi_{22} &= 0\times(-2) + 1\times 1 + 1\times 2 = 0+1+2 = \mathbf{3} \\
\pi_{23} &= 0\times 2 + 1\times(-1) + 1\times 1 = 0-1+1 = \mathbf{0} \\
\pi_{31} &= 1\times 1 + 0\times 1 + 1\times(-1) = 1+0-1 = \mathbf{0} \\
\pi_{32} &= 1\times(-2) + 0\times 1 + 1\times 2 = -2+0+2 = \mathbf{0} \\
\pi_{33} &= 1\times 2 + 0\times(-1) + 1\times 1 = 2+0+1 = \mathbf{3}
\end{aligned}$$

On obtient $A \times A^a = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\,I_3$, d'où

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A \times A^{-1} = I_3$.

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 6

cofacteurs

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Inversibilité : calcul du déterminant

On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = (-2+3+0) - (1+6+0) = 1-7 = -6$$

$\det(A) = -6 \neq 0$: la matrice A est **inversible**.

Étape 2 Les neuf cofacteurs et la matrice des cofacteurs A^c

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j de A, on calcule le mineur obtenu, puis on applique le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +((-1)\times 1 - 3\times 1) = +(-1-3) = +(-4) = -4$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0\times 1 - 3\times 1) = -(0-3) = -(-3) = 3$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(0\times 1 - (-1)\times 1) = +(0-(-1)) = 1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1\times 1 - (-1)\times 1) = -(1-(-1)) = -2$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(2\times 1 - (-1)\times 1) = +(2-(-1)) = 3$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2\times 1 - 1\times 1) = -(2-1) = -1$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = +(1\times 3 - (-1)\times(-1)) = +(3-1) = 2$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -\left(2 \times 3 - (-1) \times 0\right) = -\left(6 - 0\right) = -6$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +\left(2 \times (-1) - 1 \times 0\right) = +\left(-2 - 0\right) = +\left(-2\right) = -2$$

Contrôle. En développant selon la ligne 1, on retrouve le déterminant : $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 2 \times (-4) + 1 \times 3 + (-1) \times 1 = -6$.

On range chaque cofacteur à la place du coefficient correspondant :

$$A^c = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Étape 3 Matrice adjointe A^a et matrice inverse A^{-1}

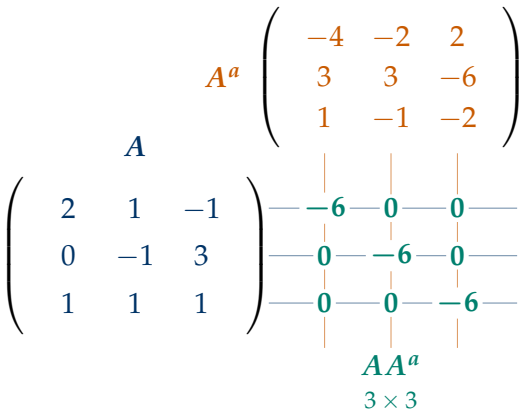
La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs : les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a.

$$A^a = \left(A^c\right)^\top = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Étape 4 Vérification par la disposition de Falk

Pour éviter de calculer avec des fractions, on met le facteur $\frac{1}{6}$ en avant : $A \times A^{-1} = -\frac{1}{6}(A \times A^a)$. On calcule d'abord $A \times A^a$ par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 2\times(-4)+1\times 3+(-1)\times 1 = -8+3-1 = \mathbf{-6}$$
$$\pi_{12} = 2\times(-2)+1\times 3+(-1)\times(-1) = -4+3+1 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{13} = 2\times 2+1\times(-6)+(-1)\times(-2) = 4-6+2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = 0\times(-4)+(-1)\times 3+3\times 1 = 0-3+3 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 0\times(-2)+(-1)\times 3+3\times(-1) = 0-3-3 = \mathbf{-6}$$
$$\pi_{23} = 0\times 2+(-1)\times(-6)+3\times(-2) = 0+6-6 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{31} = 1\times(-4)+1\times 3+1\times 1 = -4+3+1 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{32} = 1\times(-2)+1\times 3+1\times(-1) = -2+3-1 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{33} = 1\times 2+1\times(-6)+1\times(-2) = 2-6-2 = \mathbf{-6}$$

On obtient $A \times A^a = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = -6\,I_3$, d'où

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{-6} \times \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A \times A^{-1} = I_3$.

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 7 cofacteurs

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Inversibilité : calcul du déterminant

On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = (0-2+6) - (0-8-1) = 4-(-9) \;=\; 13$$

$\det(A) = 13 \neq 0$: la matrice A est **inversible**.

Étape 2 Les neuf cofacteurs et la matrice des cofacteurs A^c

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j de A, on calcule le mineur obtenu, puis on applique le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +\left(0\times 1-(-2)\times 2\right) = +\left(0-(-4)\right) = 4$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\left(1\times 1-(-2)\times(-1)\right) = -\left(1-2\right) = -\left(-1\right) = 1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = +\left(1\times 2-0\times(-1)\right) = +\left(2-0\right) = 2$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\left((-1)\times 1-3\times 2\right) = -\left(-1-6\right) = -\left(-7\right) = 7$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = +\left(2\times 1-3\times(-1)\right) = +\left(2-(-3)\right) = 5$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -\left(2\times 2-(-1)\times(-1)\right) = -\left(4-1\right) = -3$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = +\left((-1)\times(-2)-3\times 0\right) = +\left(2-0\right) = 2$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\left(2\times(-2)-3\times 1\right) = -\left(-4-3\right) = -\left(-7\right) = 7$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +\left(2\times 0-(-1)\times 1\right) = +\left(0-(-1)\right) = 1$$

Contrôle. En développant selon la ligne 1, on retrouve le déterminant : $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 2 \times 4 + (-1) \times 1 + 3 \times 2 = 13$.

On range chaque cofacteur à la place du coefficient correspondant :

$$A^c = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 3 Matrice adjointe A^a et matrice inverse A^{-1}

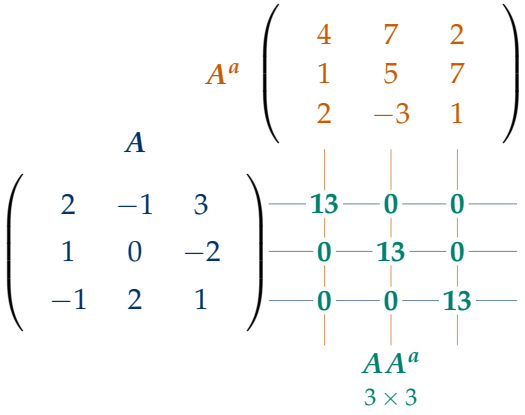
La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs : les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a.

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{7}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{5}{13} & \frac{7}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

Étape 4 Vérification par la disposition de Falk

Pour éviter de calculer avec des fractions, on met le facteur $\frac{1}{13}$ en avant : $A \times A^{-1} = \frac{1}{13}(A \times A^a)$. On calcule d'abord $A \times A^a$ par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 2 \times 4 + (-1) \times 1 + 3 \times 2 = 8 - 1 + 6 = \mathbf{13}$$
$$\pi_{12} = 2 \times 7 + (-1) \times 5 + 3 \times (-3) = 14 - 5 - 9 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{13} = 2 \times 2 + (-1) \times 7 + 3 \times 1 = 4 - 7 + 3 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = 1 \times 4 + 0 \times 1 + (-2) \times 2 = 4 + 0 - 4 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 1 \times 7 + 0 \times 5 + (-2) \times (-3) = 7 + 0 + 6 = \mathbf{13}$$
$$\pi_{23} = 1 \times 2 + 0 \times 7 + (-2) \times 1 = 2 + 0 - 2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{31} = (-1) \times 4 + 2 \times 1 + 1 \times 2 = -4 + 2 + 2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{32} = (-1) \times 7 + 2 \times 5 + 1 \times (-3) = -7 + 10 - 3 = \mathbf{0}$$

$$\pi_{33} = (-1) \times 2 + 2 \times 7 + 1 \times 1 = -2 + 14 + 1 = \mathbf{13}$$

On obtient $A \times A^a = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = 13\, I_3$, d'où

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{13} \times \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A \times A^{-1} = I_3$.

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{7}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{5}{13} & \frac{7}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$.

Remarque

Plus le déterminant est « grand », plus les fractions de A^{-1} sont lourdes : la vérification avec le facteur $\frac{1}{\det(A)}$ mis en avant évite de multiplier des fractions.

Corrigé de l'exercice 8

cofacteurs

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Inversibilité : calcul du déterminant

On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = (7+8+0) - (3+12+0) = 15-15 \;=\; 0$$

$\det(A) = 0$: la matrice A est **singulière** (non inversible). La matrice A^{-1} n'existe pas : il est inutile de calculer les cofacteurs, le calcul s'arrête ici.

Remarque

La ligne 3 est la somme des lignes 1 et 2 : le déterminant est nul. Calculer d'abord le déterminant évite de calculer neuf cofacteurs pour rien.

Corrigé de l'exercice 9 — Gauss-Jordan

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Calcul de A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan

On écrit la matrice A à gauche et la matrice identité I_3 à droite, séparées par une barre. On applique à $(A \mid I_3)$ des opérations élémentaires, une seule à la fois, jusqu'à obtenir la matrice identité à gauche : la partie droite est alors A^{-1}. La méthode dit d'elle-même si A est inversible.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Descente (Gauss). On traite les colonnes de gauche à droite : chaque pivot est ramené à 1, puis on fait apparaître des zéros au-dessous de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, partie droite comprise.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut déjà 1.

Transformation 1. Pour annuler le -1 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $-1+1\times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{-1} & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-1+1\times 1 = 0$; $-1+1\times 2 = 1$; $-2+1\times(-1) = -3$; $0+1\times 1 = 1$; $1+1\times 0 = 1$; $0+1\times 0 = 0$.

Transformation 2. Pour annuler le 3 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $3-3\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}\boxed{1}&2&-1&1&0&0\\0&1&-3&1&1&0\\(3)&4&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[O_3]{L_3-3L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&1&-3&1&1&0\\0&-2&5&-3&0&1\end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $3-3\times 1=0$; $4-3\times 2=-2$; $2-3\times(-1)=5$; $0-3\times 1=-3$; $0-3\times 0=0$; $1-3\times 0=1$.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut déjà 1.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&\boxed{1}&-3&1&1&0\\0&(-2)&5&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[O_3]{L_3+2L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&1&-3&1&1&0\\0&0&-1&-1&2&1\end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-2+2\times 1=0$; $5+2\times(-3)=-1$; $-3+2\times 1=-1$; $0+2\times 1=2$; $1+2\times 0=1$.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut -1. **Chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par -1.

Transformation 4. Multiplication de L_3 par -1.

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&1&-3&1&1&0\\0&0&\boxed{-1}&-1&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[O_2]{-L_3}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&1&-3&1&1&0\\0&0&1&1&-2&-1\end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 2=-2$; $(-1)\times 1=-1$.

Fin de la descente. La partie gauche est échelonnée, avec des pivots égaux à 1 : la matrice A est inversible. Il reste à faire apparaître des zéros au-dessus des pivots.

Remontée (Jordan). On part du dernier pivot et on remonte jusqu'au premier.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus.

Transformation 5. Pour annuler le -3 de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 trois fois la ligne L_3 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+3L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-3+3\times 1=0$; $1+3\times 1=4$; $1+3\times(-2)=-5$; $0+3\times(-1)=-3$.

Transformation 6. Pour annuler le -1 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 une fois la ligne L_3 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1+L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-1+1\times 1=0$; $1+1\times 1=2$; $0+1\times(-2)=-2$; $0+1\times(-1)=-1$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus.

Transformation 7. Pour annuler le 2 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 deux fois la ligne L_2 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1-2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

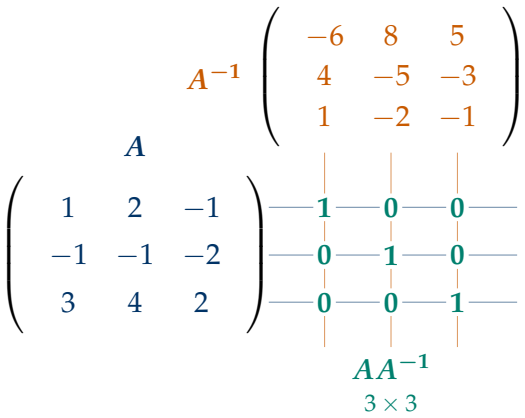
Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $2-2\times 1=0$; $0-2\times 0=0$; $2-2\times 4=-6$; $-2-2\times(-5)=8$; $-1-2\times(-3)=5$.

Fin de la remontée. La partie gauche est devenue la matrice identité : la partie droite est la matrice inverse.

$$(I_3 \mid A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Étape 2 Vérification par la disposition de Falk

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 1 \times (-6) + 2 \times 4 + (-1) \times 1 = -6 + 8 - 1 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 8 + 2 \times (-5) + (-1) \times (-2) = 8 - 10 + 2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{13} = 1 \times 5 + 2 \times (-3) + (-1) \times (-1) = 5 - 6 + 1 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = (-1) \times (-6) + (-1) \times 4 + (-2) \times 1 = 6 - 4 - 2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = (-1) \times 8 + (-1) \times (-5) + (-2) \times (-2) = -8 + 5 + 4 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{23} = (-1) \times 5 + (-1) \times (-3) + (-2) \times (-1) = -5 + 3 + 2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{31} = 3 \times (-6) + 4 \times 4 + 2 \times 1 = -18 + 16 + 2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{32} = 3 \times 8 + 4 \times (-5) + 2 \times (-2) = 24 - 20 - 4 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{33} = 3 \times 5 + 4 \times (-3) + 2 \times (-1) = 15 - 12 - 2 = \mathbf{1}$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A \times A^{-1} = I_3$.

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 5 \\ 4 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 10 — Gauss-Jordan

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Calcul de A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan

On écrit la matrice A à gauche et la matrice identité I_3 à droite, séparées par une barre. On applique à $(A \mid I_3)$ des opérations élémentaires, une seule à la fois, jusqu'à obtenir la matrice identité à gauche : la partie droite est alors A^{-1}. La méthode dit d'elle-même si A est inversible.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Descente (Gauss). On traite les colonnes de gauche à droite : chaque pivot est ramené à 1, puis on fait apparaître des zéros au-dessous de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, partie droite comprise.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_2 a un coefficient non nul (1) dans cette colonne : on échange L_1 et L_2.

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\!\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\!\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut déjà 1.

Le coefficient de L_2 dans la colonne 1 est déjà nul : rien à faire.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\!\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\!\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-3 - 1 \times (-2) = -1$; $3 - 1 \times 3 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $0 - 1 \times 1 = -1$; $1 - 1 \times 0 = 1$.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut -1. **Chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 1=-1$; $(-1)\times 0=0$; $(-1)\times 0=0$.

Transformation 4. Pour annuler le -1 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-1+1\times 1=0$; $0+1\times 1=1$; $0+1\times(-1)=-1$; $-1+1\times 0=-1$; $1+1\times 0=1$.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut déjà 1.

Fin de la descente. La partie gauche est échelonnée, avec des pivots égaux à 1 : la matrice A est inversible. Il reste à faire apparaître des zéros au-dessus des pivots.

Remontée (Jordan). On part du dernier pivot et on remonte jusqu'au premier.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus.

Transformation 5. Pour annuler le 1 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_3 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \textcircled{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2-L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $1-1\times 1=0$; $-1-1\times(-1)=0$; $0-1\times(-1)=1$; $0-1\times 1=-1$.

Transformation 6. Pour annuler le 3 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 trois fois la ligne L_3 (car $3-3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \textcircled{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1-3L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $3-3\times 1=0$; $0-3\times(-1)=3$; $1-3\times(-1)=4$; $0-3\times 1=-3$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus.

Transformation 7. Pour annuler le -2 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 deux fois la ligne L_2 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1+2L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

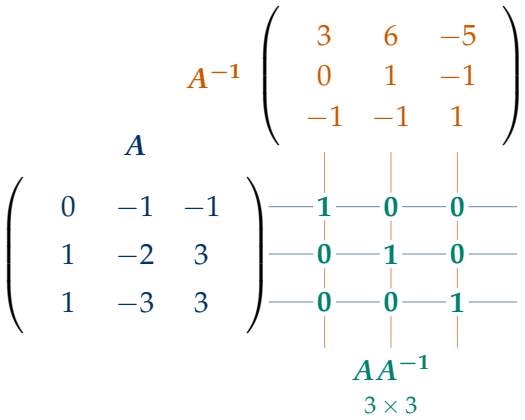
Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-2+2\times 1=0$; $0+2\times 0=0$; $3+2\times 0=3$; $4+2\times 1=6$; $-3+2\times(-1)=-5$.

Fin de la remontée. La partie gauche est devenue la matrice identité : la partie droite est la matrice inverse.

$$(I_3 \mid A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Étape 2 Vérification par la disposition de Falk

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= 0\times 3+(-1)\times 0+(-1)\times(-1)=0+0+1=\mathbf{1}\\
\pi_{12} &= 0\times 6+(-1)\times 1+(-1)\times(-1)=0-1+1=\mathbf{0}\\
\pi_{13} &= 0\times(-5)+(-1)\times(-1)+(-1)\times 1=0+1-1=\mathbf{0}\\
\pi_{21} &= 1\times 3+(-2)\times 0+3\times(-1)=3+0-3=\mathbf{0}\\
\pi_{22} &= 1\times 6+(-2)\times 1+3\times(-1)=6-2-3=\mathbf{1}\\
\pi_{23} &= 1\times(-5)+(-2)\times(-1)+3\times 1=-5+2+3=\mathbf{0}\\
\pi_{31} &= 1\times 3+(-3)\times 0+3\times(-1)=3+0-3=\mathbf{0}\\
\pi_{32} &= 1\times 6+(-3)\times 1+3\times(-1)=6-3-3=\mathbf{0}\\
\pi_{33} &= 1\times(-5)+(-3)\times(-1)+3\times 1=-5+3+3=\mathbf{1}
\end{aligned}$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A\times A^{-1}=I_3$.

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque

Le premier coefficient étant nul, il a fallu commencer par une permutation de lignes (O_1) : un pivot ne peut jamais être nul.

Corrigé de l'exercice 11 — Gauss-Jordan

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Calcul de A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan

On écrit la matrice A à gauche et la matrice identité I_3 à droite, séparées par une barre. On applique à $(A \mid I_3)$ des opérations élémentaires, une seule à la fois, jusqu'à obtenir la matrice identité à gauche : la partie droite est alors A^{-1}. La méthode dit d'elle-même si A est inversible.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Descente (Gauss). On traite les colonnes de gauche à droite : chaque pivot est ramené à 1, puis on fait apparaître des zéros au-dessous de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, partie droite comprise.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut déjà 1.

Transformation 1. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{-2} & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $-1 + 2 \times 0 = -1$; $-1 + 2 \times 4 = 7$; $0 + 2 \times 1 = 2$; $1 + 2 \times 0 = 1$; $0 + 2 \times 0 = 0$.

Transformation 2. Pour annuler le 3 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ \textcircled{3} & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $1 - 3 \times 0 = 1$; $4 - 3 \times 4 = -8$; $0 - 3 \times 1 = -3$; $0 - 3 \times 0 = 0$; $1 - 3 \times 0 = 1$.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut -1. **Chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 7 = -7$; $(-1) \times 2 = -2$; $(-1) \times 1 = -1$; $(-1) \times 0 = 0$.

Transformation 4. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -7 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-8 - 1 \times (-7) = -1$; $-3 - 1 \times (-2) = -1$; $0 - 1 \times (-1) = 1$; $1 - 1 \times 0 = 1$.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut -1. **Chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par -1.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 1 = -1$; $(-1) \times 1 = -1$.

Fin de la descente. La partie gauche est échelonnée, avec des pivots égaux à 1 : la matrice A est inversible. Il reste à faire apparaître des zéros au-dessus des pivots.

Remontée (Jordan). On part du dernier pivot et on remonte jusqu'au premier.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus.

Transformation 6. Pour annuler le -7 de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 sept fois la ligne L_3 (car $-7+7\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+7L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-7+7\times 1=0$; $-2+7\times 1=5$; $-1+7\times(-1)=-8$; $0+7\times(-1)=-7$.

Transformation 7. Pour annuler le 4 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 quatre fois la ligne L_3 (car $4-4\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1-4L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $4-4\times 1=0$; $1-4\times 1=-3$; $0-4\times(-1)=4$; $0-4\times(-1)=4$.

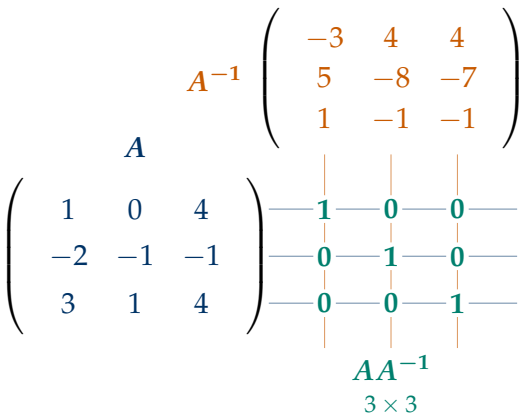
Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus. Le coefficient de L_1 dans la colonne 2 est déjà nul : rien à faire.

Fin de la remontée. La partie gauche est devenue la matrice identité : la partie droite est la matrice inverse.

$$(I_3 \mid A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Étape 2 Vérification par la disposition de Falk

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 1 \times (-3) + 0 \times 5 + 4 \times 1 = -3 + 0 + 4 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = 1 \times 4 + 0 \times (-8) + 4 \times (-1) = 4 + 0 - 4 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{13} = 1 \times 4 + 0 \times (-7) + 4 \times (-1) = 4 + 0 - 4 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = (-2) \times (-3) + (-1) \times 5 + (-1) \times 1 = 6 - 5 - 1 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = (-2) \times 4 + (-1) \times (-8) + (-1) \times (-1) = -8 + 8 + 1 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{23} = (-2) \times 4 + (-1) \times (-7) + (-1) \times (-1) = -8 + 7 + 1 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{31} = 3 \times (-3) + 1 \times 5 + 4 \times 1 = -9 + 5 + 4 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{32} = 3 \times 4 + 1 \times (-8) + 4 \times (-1) = 12 - 8 - 4 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{33} = 3 \times 4 + 1 \times (-7) + 4 \times (-1) = 12 - 7 - 4 = \mathbf{1}$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A \times A^{-1} = I_3$.

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 5 & -8 & -7 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 12 — Gauss-Jordan

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Étape 1 Calcul de A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan

On écrit la matrice A à gauche et la matrice identité I_3 à droite, séparées par une barre. On applique à $(A \mid I_3)$ des opérations élémentaires, une seule à la fois, jusqu'à obtenir la matrice identité à gauche : la partie droite est alors A^{-1}. La méthode dit d'elle-même si A est inversible.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Descente (Gauss). On traite les colonnes de gauche à droite : chaque pivot est ramené à 1, puis on fait apparaître des zéros au-dessous de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, partie droite comprise.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut déjà 1.

Transformation 1. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{2} & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $5 - 2 \times 2 = 1$; $3 - 2 \times 1 = 1$; $0 - 2 \times 1 = -2$; $1 - 2 \times 0 = 1$; $0 - 2 \times 0 = 0$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \textcircled{1} & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $3 - 1 \times 2 = 1$; $2 - 1 \times 1 = 1$; $0 - 1 \times 1 = -1$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $1 - 1 \times 0 = 1$.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut déjà 1.

Transformation 3. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 1 = 0$; $-1 - 1 \times (-2) = 1$; $0 - 1 \times 1 = -1$; $1 - 1 \times 0 = 1$.

Arrêt. La ligne L_3 ne contient plus que des zéros dans la partie gauche (à gauche de la barre). On ne pourra donc jamais obtenir la matrice identité I_3 à gauche : la matrice A n'est **pas inversible**.

La matrice A est **singulière** (non inversible) : A^{-1} n'existe pas.

Remarque

Avec Gauss-Jordan, il n'est pas nécessaire de calculer le déterminant au préalable : l'apparition d'une ligne nulle dans la partie gauche prouve que A n'est pas inversible (ici, la ligne 3 de A est la différence des lignes 2 et 1).

Corrigé de l'exercice 13

cofacteurs et Gauss-Jordan

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Méthode 1 : matrice des cofacteurs et matrice adjointe

Étape 1 Inversibilité : calcul du déterminant

On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = (3+6+4) - (6+2+6) = 13 - 14 \;=\; -1$$

$\det(A) = -1 \neq 0$: la matrice A est **inversible**.

Étape 2 Les neuf cofacteurs et la matrice des cofacteurs A^c

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j de A, on calcule le mineur obtenu, puis on applique le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +(1\times 3 - 2\times 1) = +(3-2) = 1$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -((-2)\times 3 - 2\times(-3)) = -(-6-(-6)) = 0$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = +((-2)\times 1 - 1\times(-3)) = +(-2-(-3)) = 1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -((-1)\times 3 - (-2)\times 1) = -(-3-(-2)) = -(-1) = 1$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = +(1\times 3 - (-2)\times(-3)) = +(3-6) = +(-3) = -3$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -(1\times 1 - (-1)\times(-3)) = -(1-3) = -(-2) = 2$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +((-1)\times 2 - (-2)\times 1) = +(-2-(-2)) = 0$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(1\times 2 - (-2)\times(-2)) = -(2-4) = -(-2) = 2$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = +(1\times 1 - (-1)\times(-2)) = +(1-2) = +(-1) = -1$$

Contrôle. En développant selon la ligne 1, on retrouve le déterminant : $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 1\times 1 + (-1)\times 0 + (-2)\times 1 = -1$.

On range chaque cofacteur à la place du coefficient correspondant :

$$A^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Étape 3 Matrice adjointe A^a et matrice inverse A^{-1}

La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs : les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a.

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : Gauss-Jordan

Étape 4 Calcul de A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan

On écrit la matrice A à gauche et la matrice identité I_3 à droite, séparées par une barre. On applique à $(A \mid I_3)$ des opérations élémentaires, une seule à la fois, jusqu'à obtenir la matrice identité à gauche : la partie droite est alors A^{-1}. La méthode dit d'elle-même si A est inversible.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Descente (Gauss). On traite les colonnes de gauche à droite : chaque pivot est ramené à 1, puis on fait apparaître des zéros au-dessous de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, partie droite comprise.

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut déjà 1.

Transformation 1. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{-2} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-2+2\times 1=0$; $1+2\times(-1)=-1$; $2+2\times(-2)=-2$; $0+2\times 1=2$; $1+2\times 0=1$; $0+2\times 0=0$.

Transformation 2. Pour annuler le -3 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ \textcircled{-3} & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+3L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-3+3\times 1=0$; $1+3\times(-1)=-2$; $3+3\times(-2)=-3$; $0+3\times 1=3$; $0+3\times 0=0$; $1+3\times 0=1$.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut -1. **Chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-2)=2$; $(-1)\times 2=-2$; $(-1)\times 1=-1$; $(-1)\times 0=0$.

Transformation 4. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{-2} & -3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-2+2\times 1=0$; $-3+2\times 2=1$; $3+2\times(-2)=-1$; $0+2\times(-1)=-2$; $1+2\times 0=1$.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut déjà 1.

Fin de la descente. La partie gauche est échelonnée, avec des pivots égaux à 1 : la matrice A est inversible. Il reste à faire apparaître des zéros au-dessus des pivots.

Remontée (Jordan). On part du dernier pivot et on remonte jusqu'au premier.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus.

Transformation 5. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_3 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \textcircled{2} & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2-2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $2-2\times 1=0$; $-2-2\times(-1)=0$; $-1-2\times(-2)=3$; $0-2\times 1=-2$.

Transformation 6. Pour annuler le -2 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 deux fois la ligne L_3 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \textcircled{-2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1+2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-2+2\times 1=0$; $1+2\times(-1)=-1$; $0+2\times(-2)=-4$; $0+2\times 1=2$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus.

Transformation 7. Pour annuler le -1 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1+L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (partie droite comprise) : $-1+1\times 1=0$; $0+1\times 0=0$; $-1+1\times 0=-1$; $-4+1\times 3=-1$; $2+1\times(-2)=0$.

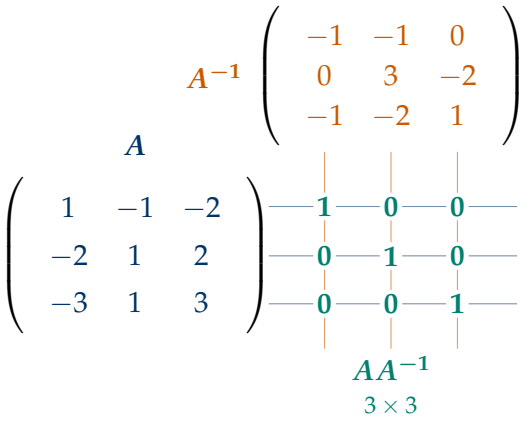
Fin de la remontée. La partie gauche est devenue la matrice identité : la partie droite est la matrice inverse.

$$(I_3 \mid A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Les deux méthodes donnent la même matrice inverse.

Étape 5 Vérification par la disposition de Falk

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= 1\times(-1)+(-1)\times 0+(-2)\times(-1) = -1+0+2 = \mathbf{1}\\
\pi_{12} &= 1\times(-1)+(-1)\times 3+(-2)\times(-2) = -1-3+4 = \mathbf{0}\\
\pi_{13} &= 1\times 0+(-1)\times(-2)+(-2)\times 1 = 0+2-2 = \mathbf{0}\\
\pi_{21} &= (-2)\times(-1)+1\times 0+2\times(-1) = 2+0-2 = \mathbf{0}\\
\pi_{22} &= (-2)\times(-1)+1\times 3+2\times(-2) = 2+3-4 = \mathbf{1}\\
\pi_{23} &= (-2)\times 0+1\times(-2)+2\times 1 = 0-2+2 = \mathbf{0}\\
\pi_{31} &= (-3)\times(-1)+1\times 0+3\times(-1) = 3+0-3 = \mathbf{0}\\
\pi_{32} &= (-3)\times(-1)+1\times 3+3\times(-2) = 3+3-6 = \mathbf{0}\\
\pi_{33} &= (-3)\times 0+1\times(-2)+3\times 1 = 0-2+3 = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A\times A^{-1}=I_3$.

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque

Comparaison. La méthode des cofacteurs demande un déterminant et neuf mineurs d'ordre 2 ; elle est systématique mais longue, et elle devient vite impraticable au-delà de l'ordre 3. La méthode de Gauss-Jordan demande ici une dizaine d'opérations élémentaires ; elle détecte d'elle-même une matrice singulière et reste utilisable pour les grandes matrices. C'est d'ailleurs elle que les logiciels utilisent.

Corrigé de l'exercice 14

paramètre m

Étape 1 Inversibilité selon la valeur de m

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = m \times 3 - 2 \times 1 = 3m - 2.$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$:

$$3m - 2 \neq 0 \iff 3m \neq 2 \iff m \neq \tfrac{2}{3}.$$

La matrice A est donc inversible pour toute valeur de m différente de $\frac{2}{3}$, et singulière pour $m = \frac{2}{3}$.

Étape 2 Calcul de A^{-1} pour $m = 1$

Pour $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\det(A) = 1 \times 3 - 2 \times 1 = 1 \neq 0$. On calcule les cofacteurs, puis la matrice adjointe : Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j : il ne reste qu'**un seul nombre**. Le déterminant d'une matrice qui ne contient qu'une ligne et une colonne est égal à ce nombre ; on applique ensuite le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\left(\begin{smallmatrix} + & - \\ - & + \end{smallmatrix}\right)$:

$c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(3) = +3 = 3$ (on supprime la ligne 1 et la colonne 1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$)

$c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(1) = -1 = -1$ (on supprime la ligne 1 et la colonne 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$)

$c_{21} = (-1)^{2+1} \times \det(2) = -2 = -2$ (on supprime la ligne 2 et la colonne 1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$)

$c_{22} = (-1)^{2+2} \times \det(1) = +1 = 1$ (on supprime la ligne 2 et la colonne 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$)

$$A^c = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

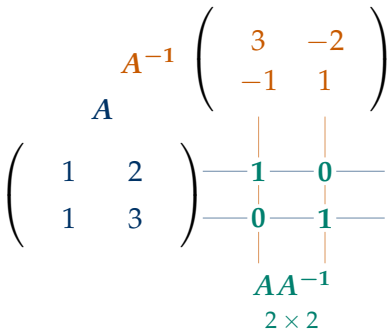
La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs (les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a), et l'inverse s'obtient en la divisant par $\det(A)$:

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 3 Vérification par la disposition de Falk

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 1 \times 3 + 2 \times (-1) = 3 - 2 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = 1 \times (-2) + 2 \times 1 = -2 + 2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = 1 \times 3 + 3 \times (-1) = 3 - 3 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 1 \times (-2) + 3 \times 1 = -2 + 3 = \mathbf{1}$$

On obtient bien la matrice identité I_2 : $A \times A^{-1} = I_2$.

> A est inversible si et seulement si $m \neq \frac{2}{3}$. Pour $m = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 15

application

Le système s'écrit $AX = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 110 \\ 180 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Étape 1 Inversibilité : calcul du déterminant

On calcule $\det(A)$ par la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes) :

$$\det(A) = (8+4+9) - (6+8+6) = 21 - 20 = 1$$

$\det(A) = 1 \neq 0$: la matrice A est **inversible**.

Étape 2 Les neuf cofacteurs et la matrice des cofacteurs A^c

Pour chaque coefficient a_{ij}, on supprime la ligne i et la colonne j de A, on calcule le mineur obtenu, puis on applique le signe $(-1)^{i+j}$ de la grille $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(2\times 2 - 4\times 1) = +(4-4) = 0$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(3\times 2 - 4\times 1) = -(6-4) = -2$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(3\times 1 - 2\times 1) = +(3-2) = 1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1\times 2 - 3\times 1) = -(2-3) = -(-1) = 1$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(2\times 2 - 3\times 1) = +(4-3) = 1$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2\times 1 - 1\times 1) = -(2-1) = -1$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +(1\times 4 - 3\times 2) = +(4-6) = +(-2) = -2$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(2\times 4 - 3\times 3) = -(8-9) = -(-1) = 1$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = +(2\times 2 - 1\times 3) = +(4-3) = 1$$

Contrôle. En développant selon la ligne 1, on retrouve le déterminant : $a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 2 \times 0 + 1 \times (-2) + 3 \times 1 = 1$.

On range chaque cofacteur à la place du coefficient correspondant :

$$A^c = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 3 Matrice adjointe A^a et matrice inverse A^{-1}

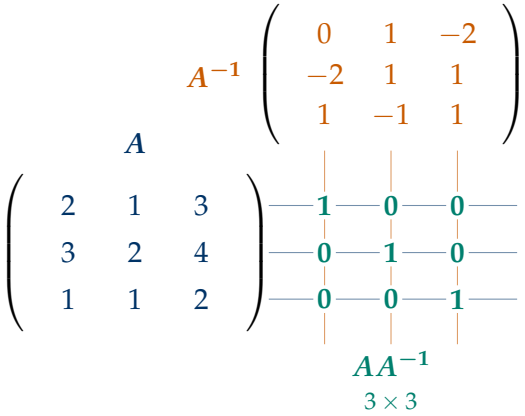
La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs : les lignes de A^c deviennent les colonnes de A^a.

$$A^a = (A^c)^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^a = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 4 Vérification par la disposition de Falk

On calcule $A \times A^{-1}$ par la disposition de Falk :



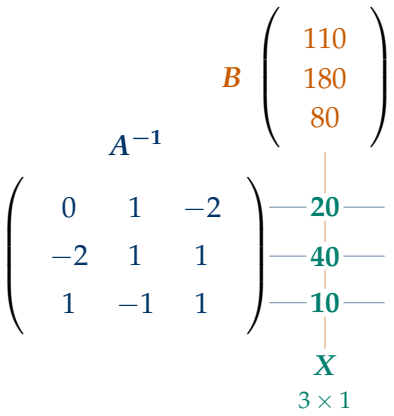
Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 2 \times 0 + 1 \times (-2) + 3 \times 1 = 0 - 2 + 3 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{12} = 2 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{13} = 2 \times (-2) + 1 \times 1 + 3 \times 1 = -4 + 1 + 3 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{21} = 3 \times 0 + 2 \times (-2) + 4 \times 1 = 0 - 4 + 4 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{22} = 3 \times 1 + 2 \times 1 + 4 \times (-1) = 3 + 2 - 4 = \mathbf{1}$$
$$\pi_{23} = 3 \times (-2) + 2 \times 1 + 4 \times 1 = -6 + 2 + 4 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{31} = 1 \times 0 + 1 \times (-2) + 2 \times 1 = 0 - 2 + 2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{32} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times (-1) = 1 + 1 - 2 = \mathbf{0}$$
$$\pi_{33} = 1 \times (-2) + 1 \times 1 + 2 \times 1 = -2 + 1 + 2 = \mathbf{1}$$

On obtient bien la matrice identité I_3 : $A \times A^{-1} = I_3$.

Étape 5 Résolution du système : $X = A^{-1}B$

En multipliant à gauche les deux membres de $AX = B$ par A^{-1}, on obtient $A^{-1}AX = A^{-1}B$, c'est-à-dire $I_3X = A^{-1}B$, soit $X = A^{-1}B$. On calcule ce produit par la disposition de Falk :



Calcul des coefficients, ligne par colonne :

$$\pi_{11} = 0 \times 110 + 1 \times 180 + (-2) \times 80 = 0 + 180 - 160 = \mathbf{20}$$
$$\pi_{21} = (-2) \times 110 + 1 \times 180 + 1 \times 80 = -220 + 180 + 80 = \mathbf{40}$$
$$\pi_{31} = 1 \times 110 + (-1) \times 180 + 1 \times 80 = 110 - 180 + 80 = \mathbf{10}$$

La solution est $x = 20$, $y = 40$ et $z = 10$: la menuiserie doit fabriquer chaque semaine **20 tables, 40 chaises et 10 armoires** pour utiliser entièrement la capacité de ses trois ateliers.

Remarque

Une fois A^{-1} connue, on résout le système pour **n'importe quel** second membre B par un simple produit : si les capacités des ateliers changent, il suffit de recalculer $A^{-1}B$.

Bilan de la série

Ce qu'il faut retenir

— **Toujours commencer** par étudier l'inversibilité : $\det(A) = 0$ signifie que A^{-1} n'existe pas.

— **Ordre 2** : la même méthode des cofacteurs ; chaque mineur se réduit à un seul nombre, dont le déterminant est ce nombre.

— **Cofacteurs** : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \left(A^c\right)^\top$, sans oublier la transposition.

— **Gauss-Jordan** : $(A \mid I_n) \to (I_n \mid A^{-1})$, une descente puis une remontée ; une ligne nulle à gauche signifie que A n'est pas inversible.

— **Vérifier** : si la matrice trouvée est vraiment l'inverse, alors $A \times A^{-1} = I_n$.

Récapitulatif des résultats

Ex.	Thème	Résultat
1	Ordre 2, coefficients positifs	$\det(A) = 1$: inversible
2	Ordre 2, coefficients négatifs	$\det(A) = 5$: inversible
3	Ordre 2, coefficients fractionnaires	$\det(A) = \frac{1}{4}$: inversible
4	Ordre 2, une matrice singulière	$\det(A) = 0$: singulière
5	Méthode des cofacteurs	$\det(A) = 3$: inversible
6	Méthode des cofacteurs, avec des zéros et des négatifs	$\det(A) = -6$: inversible
7	Méthode des cofacteurs, un cas plus difficile	$\det(A) = 13$: inversible
8	Méthode des cofacteurs, une matrice singulière	$\det(A) = 0$: singulière
9	Méthode de Gauss-Jordan	$\det(A) = -1$: inversible
10	Méthode de Gauss-Jordan, avec un pivot nul	$\det(A) = 1$: inversible
11	Méthode de Gauss-Jordan, avec des zéros	$\det(A) = 1$: inversible
12	Méthode de Gauss-Jordan, une matrice singulière	$\det(A) = 0$: singulière
13	Comparaison des deux méthodes	$\det(A) = -1$: inversible
14	Une matrice avec un paramètre	inversible si et seulement si $m \neq \frac{2}{3}$
15	Application : résoudre un système grâce à l'inverse	$\det(A) = 1$: inversible

Partie 3 : Quand les calculs se compliquent, MATLAB

▶ Les limites du calcul à la main

Inverser à la main une matrice d'ordre 3 par les cofacteurs demande déjà un déterminant, neuf mineurs, une transposition et une division. Pour une matrice d'ordre 10, il faudrait calculer cent cofacteurs, chacun étant un déterminant d'ordre 9 : c'est hors de portée d'un calcul à la main.

Pourquoi passer par un logiciel ?

— **Le calcul devient fastidieux** dès l'ordre 4, et les fractions alourdissent chaque étape.

— **Le risque d'erreur devient trop élevé** : une erreur dans un seul cofacteur ou dans une seule opération fausse toute la matrice inverse.

— **En gestion, les matrices sont grandes** : modèles de production, de prix ou de comptabilité analytique à des dizaines de lignes.

Dès que les choses commencent à se compliquer, il faut donc passer par un logiciel de calcul comme **MATLAB** (ou ses équivalents gratuits Octave et Python). Le rôle de l'étudiant reste essentiel : savoir **ce que l'on calcule**, vérifier que la matrice est inversible et **interpréter le résultat**.

▶ Inverser une matrice avec MATLAB

La fonction `inv` renvoie la matrice inverse, et `det` le déterminant. L'instruction `format rat` demande d'afficher les résultats sous forme de fractions.

Script MATLAB : quelques inverses de la série

```
format rat              % affichage sous forme de fractions

% Exercice 5 : méthode des cofacteurs
A = [1 2 0; 0 1 1; 1 0 1];
dA = det(A)
invA = inv(A)
verif = round(A*invA)   % doit donner la matrice identité

% Exercice 15 : résolution du système AX = B
M = [2 1 3; 3 2 4; 1 1 2];
B = [110; 180; 80];
X = inv(M)*B
```

Résultat affiché par MATLAB

```
dA =
       3

invA =
       1/3          -2/3           2/3
       1/3           1/3          -1/3
      -1/3           2/3           1/3
```

```
verif =
       1              0              0
       0              1              0
       0              0              1

X =
      20
      40
      10
```

Comment lire ce résultat

— On retrouve $\det(A) = 3$ et la matrice A^{-1} de l'exercice 5, et la solution $x = 20$, $y = 40$, $z = 10$ de l'exercice 15.

— La vérification $A \times A^{-1} = I_3$ se fait en une instruction ; `round` arrondit les petites erreurs d'arrondi des calculs en nombres décimaux.

— Pour une matrice singulière, `inv` affiche un avertissement : il faut toujours vérifier d'abord que $\det(A) \neq 0$.

— Pour résoudre un système, MATLAB propose aussi l'instruction `X = M\B`, plus rapide et plus précise que `inv(M)*B` pour les grands systèmes.