Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

SÉRIE D'EXERCICES CORRIGÉS

SÉRIE 7

La méthode de Gauss et la remontée par substitution

Une descente (Gauss), puis une remontée par substitution jusqu'aux solutions

OBJECTIF

Résoudre complètement un système linéaire : descendre jusqu'à la forme échelonnée pour lire les rangs, puis résoudre le système triangulaire obtenu en remontant de la dernière équation à la première.

20 systèmes linéaires | Corrigés détaillés pas à pas | Solution unique, infinité ou aucune

AU SOMMAIRE

Partie 1 **Énoncés** rappels du cours et 20 systèmes à résoudre

Partie 2 **Corrigés détaillés** démarche en six étapes pour chaque système

Bilan **Ce qu'il faut retenir** et récapitulatif des solutions

Partie 3 **MATLAB** quand les calculs se compliquent

MODULE
Mathématiques pour la gestion

PROFESSEUR
Jaouad Madkour

ANNÉE UNIVERSITAIRE
2026–2027

Partie 1 : Énoncés

▶ Rappels du cours

La série 6 a permis de connaître la nature d'un système : aucune solution, une seule ou une infinité. Il reste à trouver ces solutions. La méthode la plus directe prolonge la descente de Gauss par une **remontée par substitution** : la forme échelonnée se réécrit en un système triangulaire, que l'on résout de la dernière équation à la première. La série 8 présentera une autre façon de remonter, l'algorithme de Gauss-Jordan, qui évite toute substitution.

Avant d'aborder les exercices, rappelons la forme échelonnée, les deux temps de la méthode et la démarche à suivre pour chaque système.

Matrice échelonnée en lignes : elle donne le rang

Une matrice est **échelonnée en lignes** lorsque :

— l'élément non nul le plus à gauche de chaque ligne, appelé **pivot**, se trouve à droite des pivots des lignes supérieures, et tous les éléments situés sous un pivot sont nuls ;

— les lignes nulles sont placées en bas de la matrice.

Le **rang** d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée.

Exemple : $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (rang 3)

La méthode de Gauss : une descente, puis une remontée par substitution

Descente (Gauss). On traite les colonnes de gauche à droite, de haut en bas :

1. **Choix du pivot** : s'il est nul, on permute sa ligne avec une ligne située en dessous (O_1) ;
2. **Normalisation** : on ramène le pivot à 1 (O_2) ;
3. **Annulation au-dessous** : on fait apparaître des zéros sous le pivot (O_3).

On obtient la forme échelonnée $A_e|B_e$, sur laquelle on lit les rangs.

Remontée par substitution. On réécrit $A_e|B_e$ sous la forme d'un système : il est **triangulaire**, car chaque équation commence par une inconnue absente des équations situées au-dessous. On le résout en partant de la **dernière équation** :

4. la dernière équation donne la dernière inconnue principale ;
5. on **remonte** d'une équation : on y remplace les inconnues déjà trouvées, ce qui donne une nouvelle inconnue ; on recommence jusqu'à la première équation.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z = -1, \quad y = 2 + z = 1, \quad x = 3 + 2y - 2z = 7.$$

Rouché-Fontené : la nature du système se lit après la descente

Les rangs se lisent sur la forme échelonnée $A_e|B_e$ (m désigne le nombre d'inconnues) :

$\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(A|B) \quad \Longrightarrow$ **incompatible** : une ligne $(0 \cdots 0 \mid d)$, $d \neq 0$, et $\mathbb{S} = \emptyset$

$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = m \quad \Longrightarrow$ **compatible déterminé** : solution unique

$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) < m \quad \Longrightarrow$ **compatible indéterminé** : infinité de solutions

Si le système est incompatible, on s'arrête là : la remontée est inutile.

Infinité de solutions : variables principales et variables libres

Les **variables principales** correspondent aux colonnes avec pivot, les **variables libres** aux colonnes sans pivot. Avant de remonter, on remplace chaque variable libre par un paramètre ($\alpha, \beta, \cdots \in \mathbb{R}$). La remontée exprime alors chaque variable principale en fonction de ces paramètres.

△ ! Précaution essentielle : le même ordre des inconnues partout

Avant d'écrire la matrice des coefficients A, il faut que **les inconnues apparaissent dans le même ordre dans toutes les équations** (x, puis y, puis z, puis t). Sinon, les coefficients sont rangés dans les mauvaises colonnes : la matrice A est **fausse**, et tous les résultats qui suivent (rangs, nature du système, solutions) le sont aussi.

1. Réécrire chaque équation en plaçant les inconnues dans l'ordre x, y, z, t.
2. Lorsqu'une inconnue n'apparaît pas dans une équation, son coefficient est 0 : on écrit ce 0 dans la matrice.
3. Le vecteur X accueille les inconnues **dans ce même ordre**.

Démarche à suivre pour chaque système

1. **Forme matricielle** : écrire $AX = B$ puis former la matrice augmentée $A|B$.
2. **Descente (Gauss)** : réduire $A|B$ à sa forme échelonnée, notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée »).
3. **Nature du système** : lire $\operatorname{rang}(A)$ et $\operatorname{rang}(A|B)$ sur $A_e|B_e$ et conclure avec le théorème de Rouché-Fontené. Si le système est incompatible, $\mathbb{S} = \emptyset$ et on s'arrête là.
4. **Remontée par substitution** : réécrire $A_e|B_e$ sous forme de système triangulaire, poser les paramètres s'il y a des variables libres, puis résoudre de la dernière équation à la première en remplaçant à chaque fois les inconnues déjà trouvées.
5. **Ensemble des solutions** : écrire $\mathbb{S}$.
6. **Vérification** : remplacer la solution trouvée (ou une solution particulière) dans chaque équation du système de départ.

Rappel : les trois opérations élémentaires sur les lignes

O_1	Permuter deux lignes de la matrice	$L_i \leftrightarrow L_j$
O_2	Multiplier une ligne par une constante *non nulle* α	$\alpha\, L_i \quad (\alpha \neq 0)$
O_3	Ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne	$L_i + \beta\, L_j \quad (j \neq i)$

Consigne commune

Résoudre chacun des systèmes linéaires suivants par la **méthode de Gauss** : descente jusqu'à la forme échelonnée, puis **remontée par substitution**, en suivant les six étapes de la démarche. Effectuer **une seule opération élémentaire à la fois** et donner l'ensemble des solutions $\mathbb{S}$.

▶ Les exercices

Exercice 1 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ 2x - 6y + 6z = 2 \\ -x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

corrigé p. 6 →

Exercice 2 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} -2y + 4z = -10 \\ x - y + 3z = 1 \\ -2x + 3y - 7z = 1 \end{cases}$$

corrigé p. 10 →

Exercice 3 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} x - 3z = 3 \\ -3x - 4y + 9z = -5 \\ 2x + 2y - 6z = 4 \end{cases}$$

corrigé p. 14 →

Exercice 4 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_4 : \begin{cases} x + 3y - 2z = -2 \\ x + 5y - 4z = -8 \\ -2x - 2z = -16 \end{cases}$$

corrigé p. 17 →

Exercice 5 — 2 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_5 : \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 4x + 7y = 12 \end{cases}$$

corrigé p. 20 →

Exercice 6 — 2 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_6 : \begin{cases} 3y = 0 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$$

corrigé p. 23 →

Exercice 7 — 2 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_7 : \begin{cases} 2x - 2y = -2 \\ -2x + 2y = 5 \end{cases}$$

corrigé p. 26 →

Exercice 8 — 2 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_8 : \begin{cases} -x - 4y = -4 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

corrigé p. 28 →

Exercice 9 — 3 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_9 : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = -1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

corrigé p. 31 →

Exercice 10 — 3 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_{10} : \begin{cases} 2x + 4y = -6 \\ 2y = 2 \\ -2x + 2y = 13 \end{cases}$$

corrigé p. 35 →

Exercice 11 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{11} : \begin{cases} -2x + 6y - 8z = 6 \\ -2x + 6y - 6z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = -6 \end{cases}$$

corrigé p. 37 →

Exercice 12 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{12} : \begin{cases} -3x - 3y + 6z = -6 \\ x + y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 4z = 4 \end{cases}$$

corrigé p. 41 →

Exercice 13 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{13} : \begin{cases} x + y + 4z = 3 \\ x + y + z = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

corrigé p. 44 →

Exercice 14 3 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{14} : \begin{cases} x + 3y - 3z = -1 \\ -2x - 7y + 5z - 2t = 0 \\ -2x - 7y + 7z + 2t = -2 \end{cases}$$

corrigé p. 48 →

Exercice 15 3 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{15} : \begin{cases} 2x + 2y + 6z + 2t = 6 \\ 2x + 2z + 2t = 6 \\ -2x + 2y + 2z - 2t = -6 \end{cases}$$

corrigé p. 53 →

Exercice 16 4 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{16} : \begin{cases} -2y - 2z = 4 \\ -2x + 2y - 2z = 6 \\ -2x + 3y - 4z = 4 \\ -4x + 2y + 2z = 16 \end{cases}$$

corrigé p. 57 →

Exercice 17 4 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{17} : \begin{cases} -x - 2z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 3x + 3y + 6z = 9 \end{cases}$$

corrigé p. 63 →

Exercice 18 4 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{18} : \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 2y - 4z = 2 \\ 2x + 6y - 6z = 6 \\ -2x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

corrigé p. 68 →

Exercice 19 4 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{19} : \begin{cases} 3x - 6y - 9z - 6t = 3 \\ -x + 3y + z = 2 \\ -2x + 6y + 4z + 4t = 0 \\ x - 3y + z + 5t = -8 \end{cases}$$

corrigé p. 72 →

Exercice 20 4 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{20} : \begin{cases} 2x - 2y + 2z + 2t = -2 \\ -2y + 2z - 4t = 0 \\ 4x - 2y + 2z + 8t = -4 \\ 2x - y + 2z + 3t = -4 \end{cases}$$

corrigé p. 77 →

Partie 2 : Corrigés détaillés

Conventions de lecture

— Les lignes de chaque matrice sont notées $L_1, L_2, L_3, \ldots$ selon leur position dans la matrice *actuelle* : après chaque étape, la numérotation repart de L_1.

— Au-dessus de chaque flèche figure la transformation effectuée ; en dessous, le code de l'opération élémentaire (O_1, O_2 ou O_3).

— Chaque opération porte sur **toute la ligne**, second membre compris ; la nouvelle ligne est calculée **coefficient par coefficient**, de gauche à droite.

$\boxed{2}$ pivot en cours d'utilisation (encadré en bleu)

$\textcircled{-3}$ nombre à annuler, au-dessous du pivot (entouré en orange)

1 pivot de la forme échelonnée $A_e|B_e$ (en rouge)

Corrigé de l'exercice 1

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ 2x - 6y + 6z = 2 \\ -x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 6 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 2 & 3 \\ \textcircled{2} & -6 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2-2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $-6-2\times(-2)=-2$; $6-2\times 2=2$; $2-2\times 3=-4$.

Transformation 2. Pour annuler le -1 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ \textcircled{-1} & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $4+1\times(-2)=2$; $-1+1\times 2=1$; $-2+1\times 3=1$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times 2=-1$; $-\frac{1}{2}\times(-4)=2$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $1 - 2 \times (-1) = 3$; $1 - 2 \times 2 = -3$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 3. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$; $\frac{1}{3} \times (-3) = -1$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -2 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_1 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée par substitution va donner.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -2 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ y - z = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

Dernière équation. L'équation $z = -1$ donne directement $z = -1$.

Équation 2. L'équation $y - z = 2$ donne $y = 2 + z$. On remplace z par -1 :

$$y = 2 + (-1) \;=\; 1.$$

Équation 1. L'équation $x - 2y + 2z = 3$ donne $x = 3 + 2y - 2z$. On remplace y par 1, z par -1 :

$$x = 3 + 2 \times 1 - 2 \times (-1) \;=\; 7.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Toutes les inconnues sont maintenant connues.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned}
&\text{équation 1 : } 1\times 7+(-2)\times 1+2\times(-1)=7-2-2=3\ \checkmark\\
&\text{équation 2 : } 2\times 7+(-6)\times 1+6\times(-1)=14-6-6=2\ \checkmark\\
&\text{équation 3 : } (-1)\times 7+4\times 1+(-1)\times(-1)=-7+4+1=-2\ \checkmark
\end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_1$ admet une **solution unique** : $x=7$, $y=1$, $z=-1$, soit

$$\mathbb{S}=\{(7,1,-1)\}.$$

Corrigé de l'exercice 2

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_2:\begin{cases} -2y+4z=-10\\ x-y+3z=1\\ -2x+3y-7z=1\end{cases}$$

Il comporte $n=3$ équations et $m=3$ inconnues (x,y,z).

Étape 1 Forme matricielle $AX=B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&-2&4\\1&-1&3\\-2&3&-7\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}-10\\1\\1\end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-2&4&-10\\1&-1&3&1\\-2&3&-7&1\end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_2, située plus bas, a un coefficient non nul (1) dans cette colonne : on échange L_1 et L_2 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 4 & -10 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \\ -2 & 3 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \\ \textcircled{-2} & 3 & -7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $3+2\times(-1)=1$; $-7+2\times 3=-1$; $1+2\times 1=3$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times 4=-2$; $-\frac{1}{2}\times(-10)=5$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 5 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-1 - 1 \times (-2) = 1$; $3 - 1 \times 5 = -2$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_2 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée par substitution va donner.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ y - 2z = 5 \\ z = -2 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

Dernière équation. L'équation $z = -2$ donne directement $z = -2$.

Équation 2. L'équation $y - 2z = 5$ donne $y = 5 + 2z$. On remplace z par -2 :

$$y = 5 + 2 \times (-2) \;=\; 1.$$

Équation 1. L'équation $x - y + 3z = 1$ donne $x = 1 + y - 3z$. On remplace y par 1, z par -2 :

$$x = 1 + 1 - 3 \times (-2) \;=\; 8.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Toutes les inconnues sont maintenant connues.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1 : } (-2) \times 1 + 4 \times (-2) = -2 - 8 = -10 \;\checkmark \\ &\text{équation 2 : } 1 \times 8 + (-1) \times 1 + 3 \times (-2) = 8 - 1 - 6 = 1 \;\checkmark \\ &\text{équation 3 : } (-2) \times 8 + 3 \times 1 + (-7) \times (-2) = -16 + 3 + 14 = 1 \;\checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_2$ admet une **solution unique** : $x = 8$, $y = 1$, $z = -2$, soit

$$\mathbb{S} = \{(8, 1, -2)\}.$$

Corrigé de l'exercice 3

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} x - 3z = 3 \\ -3x - 4y + 9z = -5 \\ 2x + 2y - 6z = 4 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ -3 & -4 & 9 & -5 \\ 2 & 2 & -6 & 4 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le -3 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 trois fois la ligne L_1 (car $-3 + 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 3 \\ \textcircled{-3} & -4 & 9 & -5 \\ 2 & 2 & -6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -6 & 4 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3 + 3 \times 1 = 0$; $-4 + 3 \times 0 = -4$; $9 + 3 \times (-3) = 0$; $-5 + 3 \times 3 = 4$.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 3\\ 0 & -4 & 0 & 4\\ \textcircled{2} & 2 & -6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-2L_1} \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3\\ 0 & -4 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $2-2\times 0=2$; $-6-2\times(-3)=0$; $4-2\times 3=-2$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -4. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{4}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3\\ 0 & \boxed{-4} & 0 & 4\\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{4}L_2} \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{4}\times(-4)=1$; $-\frac{1}{4}\times 0=0$; $-\frac{1}{4}\times 4=-1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3\\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1\\ 0 & \textcircled{2} & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-2L_2} \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $0-2\times 0=0$; $-2-2\times(-1)=0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0=0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e=\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 & 3\\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_3 \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée par substitution va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - 3z = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : z.

Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Dernière équation. L'équation $y = -1$ donne directement $y = -1$.

Équation 1. L'équation $x - 3z = 3$ donne $x = 3 + 3z$. On remplace les variables libres par leurs paramètres :

$$x = 3 + 3\alpha.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Chaque variable principale est maintenant exprimée en fonction des paramètres :

$$\begin{cases} x = 3 + 3\alpha \\ y = -1 \\ z = \alpha \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = 6$, $y = -1$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : 1 \times 6 + (-3) \times 1 = 6 - 3 = 3 \checkmark \\ &\text{équation 2} : (-3) \times 6 + (-4) \times (-1) + 9 \times 1 = -18 + 4 + 9 = -5 \checkmark \\ &\text{équation 3} : 2 \times 6 + 2 \times (-1) + (-6) \times 1 = 12 - 2 - 6 = 4 \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_3$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (3 + 3\alpha, -1, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 4

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_4 : \begin{cases} x + 3y - 2z = -2 \\ x + 5y - 4z = -8 \\ -2x - 2z = -16 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 3 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -4 & -8 \\ -2 & 0 & -2 & -16 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 1 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & -2 \\ \textcircled{1} & 5 & -4 & -8 \\ -2 & 0 & -2 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ -2 & 0 & -2 & -16 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $5 - 1 \times 3 = 2$; $-4 - 1 \times (-2) = -2$; $-8 - 1 \times (-2) = -6$.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ \textcircled{-2} & 0 & -2 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 6 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $0 + 2 \times 3 = 6$; $-2 + 2 \times (-2) = -6$; $-16 + 2 \times (-2) = -20$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & -6 \\ 0 & 6 & -6 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times (-6) = -3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 6 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 six fois la ligne L_2 (car $6 - 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -3 \\ 0 & \textcircled{6} & -6 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 6L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $6 - 6 \times 1 = 0$; $-6 - 6 \times (-1) = 0$; $-20 - 6 \times (-3) = -2$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. Le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) vaut 0, de même que ceux des lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot**. On passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_3.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, les lignes restantes ne contiennent plus que des zéros, mais leur second membre n'est pas nul : chacune traduit une **équation impossible**. On fait apparaître un pivot dans la colonne des constantes (et des zéros sous lui) pour lire correctement le rang de $A|B$. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$.

La colonne des constantes est traitée.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & -2 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|B) = 3 \implies \mathcal{S}_4 \text{ est incompatible.}$$

En effet, la ligne L_3 de $A_e|B_e$ est de la forme $(0 \cdots 0 \mid 1)$: elle traduit l'équation

$$0x + 0y + 0z = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 = 1,$$

ce qui est **impossible**. Aucune valeur des inconnues ne peut vérifier cette équation : il est donc inutile de poursuivre avec la remontée.

Le système $\mathcal{S}_4$ est incompatible :

$$S = \emptyset.$$

Corrigé de l'exercice 5

2 équations, 2 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_5 : \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 4x + 7y = 12 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 12 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 4 = 2$; $\frac{1}{2} \times 6 = 3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 4 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 quatre fois la ligne L_1 (car $4 - 4 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 3 \\ \textcircled{4} & 7 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 4L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $4 - 4 \times 1 = 0$; $7 - 4 \times 2 = -1$; $12 - 4 \times 3 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 0=0$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\operatorname{rang}(A|B)=2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\operatorname{rang}(A)=2$.

$$\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A|B)=2=m \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{S}_5 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée par substitution va donner.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ y=0 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

Dernière équation. L'équation $y=0$ donne directement $y=0$.

Équation 1. L'équation $x+2y=3$ donne $x=3-2y$. On remplace y par 0 :

$$x=3-2\times 0 \;=\; 3.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Toutes les inconnues sont maintenant connues.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation } 1 : 2 \times 3 + 4 \times 0 = 6 + 0 = 6 \checkmark$$
$$\text{équation } 2 : 4 \times 3 + 7 \times 0 = 12 + 0 = 12 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_5$ admet une **solution unique** : $x = 3$, $y = 0$, soit

$$\mathbb{S} = \{(3, 0)\}.$$

Corrigé de l'exercice 6

2 équations, 2 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_6 : \begin{cases} 3y = 0 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_2, située plus bas, a un coefficient non nul (2) dans cette colonne : on échange L_1 et L_2 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 2. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times 6 = 3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 3. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$; $\frac{1}{3} \times 0 = 0$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_6 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée par substitution va donner.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

Dernière équation. L'équation $y = 0$ donne directement $y = 0$.

Équation 1. L'équation $x - y = 3$ donne $x = 3 + y$. On remplace y par 0 :

$$x = 3 + 0 \;=\; 3.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Toutes les inconnues sont maintenant connues.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation } 1 : 3 \times 0 = 0 \;\checkmark$$
$$\text{équation } 2 : 2 \times 3 + (-2) \times 0 = 6 + 0 = 6 \;\checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_6$ admet une **solution unique** : $x = 3$, $y = 0$, soit

$$\mathbb{S} = \{(3, 0)\}.$$

Corrigé de l'exercice 7

2 équations, 2 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_7 : \begin{cases} 2x - 2y = -2 \\ -2x + 2y = 5 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & -1 \\ \textcircled{-2} & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $2+2\times(-1)=0$; $5+2\times(-1)=3$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) vaut 0, de même que ceux des lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot**. On passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_2.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, les lignes restantes ne contiennent plus que des zéros, mais leur second membre n'est pas nul : chacune traduit une **équation impossible**. On fait apparaître un pivot dans la colonne des constantes (et des zéros sous lui) pour lire correctement le rang de $A|B$. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut 3. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{3}\times 3=1$.

La colonne des constantes est traitée.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 1, donc $\text{rang}(A) = 1$.

$$\text{rang}(A) = 1 \neq \text{rang}(A|B) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_7 \text{ est incompatible.}$$

En effet, la ligne L_2 de $A_e|B_e$ est de la forme $(0 \cdots 0 \mid 1)$: elle traduit l'équation

$$0x + 0y = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 = 1,$$

ce qui est **impossible**. Aucune valeur des inconnues ne peut vérifier cette équation : il est donc inutile de poursuivre avec la remontée.

Le système $\mathcal{S}_7$ est incompatible :

$$\mathrm{S} = \emptyset.$$

Corrigé de l'exercice 8

2 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_8 : \begin{cases} -x - 4y = -4 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : z n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par -1.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & -4 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-4)=4$; $(-1)\times 0=0$; $(-1)\times(-4)=4$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 4 & 0 & 4 \\ \textcircled{1} & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $2-1\times 4=-2$; $-2-1\times 0=-2$; $2-1\times 4=-2$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 4 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_8 \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée par substitution va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 4 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + 4y = 4 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : z.

Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Dernière équation. L'équation $y + z = 1$ donne $y = 1 - z$. On remplace les variables libres par leurs paramètres :

$$y = 1 - \alpha.$$

Équation 1. L'équation $x + 4y = 4$ donne $x = 4 - 4y$. On remplace y par $1 - \alpha$:

$$x = 4 - 4 \times (1 - \alpha) \;=\; 4\alpha.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Chaque variable principale est maintenant exprimée en fonction des paramètres :

$$\begin{cases} x = 4\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = 4$, $y = 0$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1} : (-1) \times 4 + (-4) \times 0 = -4 + 0 = -4 \checkmark$$
$$\text{équation 2} : 1 \times 4 + 2 \times 0 + (-2) \times 1 = 4 + 0 - 2 = 2 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_8$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \left\{ (4\alpha, 1 - \alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 9

3 équations, 2 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_9 : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = -1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 0 \\ (2) & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $1 - 2 \times 1 = -1$; $-1 - 2 \times 0 = -1$.

Transformation 2. Pour annuler le -1 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ (-1) & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $2 + 1 \times 1 = 3$; $3 + 1 \times 0 = 3$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times (-1) = 1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 3 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & \textcircled{3} & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $3 - 3 \times 1 = 0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_9 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée par substitution va donner.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

Dernière équation. L'équation $y = 1$ donne directement $y = 1$.

Équation 1. L'équation $x + y = 0$ donne $x = -y$. On remplace y par 1 :

$$x = -1.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Toutes les inconnues sont maintenant connues.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1 : } 1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0 \ \checkmark \\ &\text{équation 2 : } 2 \times (-1) + 1 \times 1 = -2 + 1 = -1 \ \checkmark \\ &\text{équation 3 : } (-1) \times (-1) + 2 \times 1 = 1 + 2 = 3 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_9$ admet une **solution unique** : $x = -1$, $y = 1$, soit

$$\mathbb{S} = \{(-1, 1)\}.$$

Corrigé de l'exercice 10

3 équations, 2 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{10} : \begin{cases} 2x + 4y = -6 \\ 2y = 2 \\ -2x + 2y = 13 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 2 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 13 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 13 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 4 = 2$; $\frac{1}{2} \times (-6) = -3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ \textcircled{-2} & 2 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $2+2\times 2=6$; $13+2\times(-3)=7$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 6 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2=1$; $\frac{1}{2}\times 2=1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 6 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 six fois la ligne L_2 (car $6-6\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & \textcircled{6} & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-6L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $6-6\times 1=0$; $7-6\times 1=1$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, les lignes restantes ne contiennent plus que des zéros, mais leur second membre n'est pas nul : chacune traduit une **équation impossible**. On fait apparaître un pivot dans la colonne des constantes (et des zéros sous lui) pour lire correctement le rang de $A|B$. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

La colonne des constantes est traitée.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\operatorname{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\operatorname{rang}(A) = 2$.

$$\operatorname{rang}(A) = 2 \neq \operatorname{rang}(A|B) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{10} \text{ est incompatible.}$$

En effet, la ligne L_3 de $A_e|B_e$ est de la forme $(0 \cdots 0 \mid 1)$: elle traduit l'équation

$$0x + 0y = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 = 1,$$

ce qui est **impossible**. Aucune valeur des inconnues ne peut vérifier cette équation : il est donc inutile de poursuivre avec la remontée.

Le système $\mathcal{S}_{10}$ est incompatible :

$$\mathrm{S} = \emptyset.$$

Corrigé de l'exercice 11

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{11} : \begin{cases} -2x + 6y - 8z = 6 \\ -2x + 6y - 6z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = -6 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 6 & -8 \\ -2 & 6 & -6 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 6 & -8 & 6 \\ -2 & 6 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 6 & -8 & 6 \\ -2 & 6 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 \\ -2 & 6 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 6 = -3$; $-\frac{1}{2} \times (-8) = 4$; $-\frac{1}{2} \times 6 = -3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 4 & -3 \\ \textcircled{-2} & 6 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $6 + 2 \times (-3) = 0$; $-6 + 2 \times 4 = 2$; $0 + 2 \times (-3) = -6$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ \textcircled{2} & -4 & 6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-4 - 2 \times (-3) = 2$; $6 - 2 \times 4 = -2$; $-6 - 2 \times (-3) = 0$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_3, située plus bas, a un coefficient non nul (2) dans cette colonne : on échange L_2 et L_3 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 4. Permutation des lignes L_2 et L_3.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times 0 = 0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-6) = -3$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -3 & 4 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{11} \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée par substitution va donner.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -3 & 4 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - 3y + 4z = -3 \\ y - z = 0 \\ z = -3 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

Dernière équation. L'équation $z = -3$ donne directement $z = -3$.

Équation 2. L'équation $y - z = 0$ donne $y = z$. On remplace z par -3 :

$$y = (-3) = -3.$$

Équation 1. L'équation $x - 3y + 4z = -3$ donne $x = -3 + 3y - 4z$. On remplace y par -3, z par -3 :

$$x = -3 + 3 \times (-3) - 4 \times (-3) = 0.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Toutes les inconnues sont maintenant connues.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned}
&\text{équation 1} : (-2)\times 0 + 6\times(-3) + (-8)\times(-3) = 0 - 18 + 24 = 6 \ \checkmark\\
&\text{équation 2} : (-2)\times 0 + 6\times(-3) + (-6)\times(-3) = 0 - 18 + 18 = 0 \ \checkmark\\
&\text{équation 3} : 2\times 0 + (-4)\times(-3) + 6\times(-3) = 0 + 12 - 18 = -6 \ \checkmark
\end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{11}$ admet une **solution unique** : $x = 0$, $y = -3$, $z = -3$, soit

$$\mathrm{S} = \{(0, -3, -3)\}.$$

Corrigé de l'exercice 12

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{12} : \begin{cases} -3x - 3y + 6z = -6 \\ x + y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 4z = 4 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -3. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{3}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-3} & -3 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{3}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{3}\times(-3)=1$; $-\frac{1}{3}\times(-3)=1$; $-\frac{1}{3}\times 6=-2$; $-\frac{1}{3}\times(-6)=2$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 2 \\ \textcircled{1} & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $1-1\times 1=0$; $-2-1\times(-2)=0$; $2-1\times 2=0$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{2} & 2 & -4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $2-2\times 1=0$; $-4-2\times(-2)=0$; $4-2\times 2=0$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. Les lignes L_2, L_3 sont entièrement nulles, seconds membres compris : elles traduisent l'équation $0 = 0$, toujours vraie.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 1, donc $\text{rang}(A|B) = 1$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 1, donc $\text{rang}(A) = 1$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 1 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{12} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée par substitution va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations ; les lignes nulles, qui traduisent l'équation $0 = 0$, n'apportent aucune information et disparaissent :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 2 \end{array}\right.$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x ;

— **Variables libres** (colonnes sans pivot) : y, z.

Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $y = \alpha$, $z = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Dernière équation. L'équation $x + y - 2z = 2$ donne $x = 2 - y + 2z$. On remplace les variables libres par leurs paramètres :

$$x = 2 - \alpha + 2\beta.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Chaque variable principale est maintenant exprimée en fonction des paramètres :

$$\begin{cases} x = 2 - \alpha + 2\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$, $\beta = 1$: $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1} : (-3) \times 3 + (-3) \times 1 + 6 \times 1 = -9 - 3 + 6 = -6 \checkmark$$
$$\text{équation 2} : 1 \times 3 + 1 \times 1 + (-2) \times 1 = 3 + 1 - 2 = 2 \checkmark$$
$$\text{équation 3} : 2 \times 3 + 2 \times 1 + (-4) \times 1 = 6 + 2 - 4 = 4 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{12}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant de 2 paramètres :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (2 - \alpha + 2\beta, \alpha, \beta) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour les paramètres fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 13

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{13} : \begin{cases} x + y + 4z = 3 \\ x + y + z = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : z n'apparaît pas dans l'équation 3 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 1 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 4 & 3 \\ \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 4 = -3$; $0 - 1 \times 3 = -3$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ \textcircled{1} & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 4 = -4$; $-1 - 1 \times 3 = -4$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) vaut 0, de même que ceux des lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot** : la variable y sera une **variable libre**. On passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_2.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -3. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{3}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{3}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{3} \times (-3) = 1$; $-\frac{1}{3} \times (-3) = 1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 4. Pour annuler le -4 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 quatre fois la ligne L_2 (car $-4 + 4 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-4} & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 4L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-4 + 4 \times 1 = 0$; $-4 + 4 \times 1 = 0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{13} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée par substitution va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + y + 4z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, z ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : y.

Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $y = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Dernière équation. L'équation $z = 1$ donne directement $z = 1$.

Équation 1. L'équation $x + y + 4z = 3$ donne $x = 3 - y - 4z$. On remplace z par 1 et les variables libres par leurs paramètres :

$$x = 3 - \alpha - 4 \times 1 = -1 \ - \ \alpha.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Chaque variable principale est maintenant exprimée en fonction des paramètres :

$$\begin{cases} x = -1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = -2$, $y = 1$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation } 1 : 1 \times (-2) + 1 \times 1 + 4 \times 1 = -2 + 1 + 4 = 3 \ \checkmark \\ &\text{équation } 2 : 1 \times (-2) + 1 \times 1 + 1 \times 1 = -2 + 1 + 1 = 0 \ \checkmark \\ &\text{équation } 3 : 1 \times (-2) + 1 \times 1 = -2 + 1 = -1 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{13}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (-1 - \alpha, \alpha, 1) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 14

3 équations, 4 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{14} : \begin{cases} x + 3y - 3z = -1 \\ -2x - 7y + 5z - 2t = 0 \\ -2x - 7y + 7z + 2t = -2 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 4$ inconnues (x, y, z, t).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : t n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ -2 & -7 & 5 & -2 \\ -2 & -7 & 7 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 & -1 \\ -2 & -7 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 7 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & -3 & 0 & -1 \\ \textcircled{-2} & -7 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 7 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -7 & 7 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $-7 + 2 \times 3 = -1$; $5 + 2 \times (-3) = -1$; $-2 + 2 \times 0 = -2$; $0 + 2 \times (-1) = -2$.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ (-2) & -7 & 7 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $-7+2\times 3=-1$; $7+2\times(-3)=1$; $2+2\times 0=2$; $-2+2\times(-1)=-4$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-2)=2$; $(-1)\times(-2)=2$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le -1 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 & 2 \\ 0 & (-1) & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $1+1\times 1=2$; $2+1\times 2=4$; $-4+1\times 2=-2$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2=1$; $\frac{1}{2}\times 4=2$; $\frac{1}{2}\times(-2)=-1$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & -1 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\operatorname{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\operatorname{rang}(A) = 3$.

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = 3 < m = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{14} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée par substitution va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + 3y - 3z = -1 \\ y + z + 2t = 2 \\ z + 2t = -1 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y, z ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : t.

Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $t = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Dernière équation. L'équation $z + 2t = -1$ donne $z = -1 - 2t$. On remplace les variables libres par leurs paramètres :

$$z = -1 - 2\alpha.$$

Équation 2. L'équation $y + z + 2t = 2$ donne $y = 2 - z - 2t$. On remplace z par $-1 - 2\alpha$ et les variables libres par leurs paramètres :

$$y = 2 - (-1 - 2\alpha) - 2\alpha \ = \ 3.$$

Équation 1. L'équation $x + 3y - 3z = -1$ donne $x = -1 - 3y + 3z$. On remplace y par 3, z par $-1 - 2\alpha$:

$$x = -1 - 3 \times 3 + 3 \times (-1 - 2\alpha) = -13 - 6\alpha.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Chaque variable principale est maintenant exprimée en fonction des paramètres :

$$\begin{cases} x = -13 - 6\alpha \\ y = 3 \\ z = -1 - 2\alpha \\ t = \alpha \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = -19$, $y = 3$, $z = -3$, $t = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : 1 \times (-19) + 3 \times 3 + (-3) \times (-3) = -19 + 9 + 9 = -1 \ \checkmark \\ &\text{équation 2} : (-2) \times (-19) + (-7) \times 3 + 5 \times (-3) + (-2) \times 1 \\ &\qquad = 38 - 21 - 15 - 2 = 0 \ \checkmark \\ &\text{équation 3} : (-2) \times (-19) + (-7) \times 3 + 7 \times (-3) + 2 \times 1 \\ &\qquad = 38 - 21 - 21 + 2 = -2 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{14}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \left\{ (-13 - 6\alpha, 3, -1 - 2\alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 15

3 équations, 4 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{15} : \begin{cases} 2x + 2y + 6z + 2t = 6 \\ 2x \quad\quad + 2z + 2t = 6 \\ -2x + 2y + 2z - 2t = -6 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 4$ inconnues (x, y, z, t).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 2 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 2 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2 = 1$; $\frac{1}{2}\times 2 = 1$; $\frac{1}{2}\times 6 = 3$; $\frac{1}{2}\times 2 = 1$; $\frac{1}{2}\times 6 = 3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2\times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ \textcircled{2} & 0 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2\times 1 = 0$; $0 - 2\times 1 = -2$; $2 - 2\times 3 = -4$; $2 - 2\times 1 = 0$; $6 - 2\times 3 = 0$.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2\times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ \textcircled{-2} & 2 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2\times 1 = 0$; $2 + 2\times 1 = 4$; $2 + 2\times 3 = 8$; $-2 + 2\times 1 = 0$; $-6 + 2\times 3 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-2} & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times (-4) = 2$; $-\frac{1}{2} \times 0 = 0$; $-\frac{1}{2} \times 0 = 0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le 4 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 quatre fois la ligne L_2 (car $4 - 4 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{4} & 8 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 4L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $4 - 4 \times 1 = 0$; $8 - 4 \times 2 = 0$; $0 - 4 \times 0 = 0$; $0 - 4 \times 0 = 0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{15} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée par substitution va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + y + 3z + t = 3 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variables libres** (colonnes sans pivot) : z, t.

Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$, $t = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Dernière équation. L'équation $y + 2z = 0$ donne $y = -2z$. On remplace les variables libres par leurs paramètres :

$$y = -2\alpha.$$

Équation 1. L'équation $x + y + 3z + t = 3$ donne $x = 3 - y - 3z - t$. On remplace y par -2α et les variables libres par leurs paramètres :

$$x = 3 - (-2\alpha) - 3\alpha - \beta = 3 - \alpha \ - \ \beta.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Chaque variable principale est maintenant exprimée en fonction des paramètres :

$$\begin{cases} x = 3 - \alpha - \beta \\ y = -2\alpha \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$, $\beta = 1$: $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$, $t = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} \text{équation 1} &: 2 \times 1 + 2 \times (-2) + 6 \times 1 + 2 \times 1 \\ &= 2 - 4 + 6 + 2 = 6 \checkmark \\ \text{équation 2} &: 2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 = 2 + 2 + 2 = 6 \checkmark \\ \text{équation 3} &: (-2) \times 1 + 2 \times (-2) + 2 \times 1 + (-2) \times 1 \\ &= -2 - 4 + 2 - 2 = -6 \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{15}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant de 2 paramètres :

$$\mathbb{S} = \left\{ (3 - \alpha - \beta, -2\alpha, \alpha, \beta) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque valeur choisie pour les paramètres fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 16

4 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{16} : \begin{cases} -2y - 2z = 4 \\ -2x + 2y - 2z = 6 \\ -2x + 3y - 4z = 4 \\ -4x + 2y + 2z = 16 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_2, située plus bas, a un coefficient non nul (-2) dans cette colonne : on échange L_1 et L_2 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 2. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-2} & 2 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$; $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 6 = -3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ \textcircled{-2} & 3 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $3 + 2 \times (-1) = 1$; $-4 + 2 \times 1 = -2$; $4 + 2 \times (-3) = -2$.

Transformation 4. Pour annuler le -4 de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 quatre fois la ligne L_1 (car $-4 + 4 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ \textcircled{-4} & 2 & 2 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 + 4L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-4 + 4 \times 1 = 0$; $2 + 4 \times (-1) = -2$; $2 + 4 \times 1 = 6$; $16 + 4 \times (-3) = 4$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 4 = -2$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 6. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & (1) & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-2 - 1 \times 1 = -3$; $-2 - 1 \times (-2) = 0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 7. Pour annuler le -2 de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 deux fois la ligne L_2 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & (-2) & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 + 2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $6 + 2 \times 1 = 8$; $4 + 2 \times (-2) = 0$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -3. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $-\frac{1}{3}$.

Transformation 8. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{3}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{3} \times (-3) = 1$; $-\frac{1}{3} \times 0 = 0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 9. Pour annuler le 8 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 huit fois la ligne L_3 (car $8 - 8 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{8} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 8L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $8 - 8 \times 1 = 0$; $0 - 8 \times 0 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_4 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{16} \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée par substitution va donner.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - y + z = -3 \\ y + z = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

Dernière équation. L'équation $z = 0$ donne directement $z = 0$.

Équation 2. L'équation $y + z = -2$ donne $y = -2 - z$. On remplace z par 0 :

$$y = -2 - 0 \;=\; -2.$$

Équation 1. L'équation $x - y + z = -3$ donne $x = -3 + y - z$. On remplace y par -2, z par 0 :

$$x = -3 + (-2) - 0 \;=\; -5.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Toutes les inconnues sont maintenant connues.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

équation 1 : $(-2) \times (-2) + (-2) \times 0 = 4 + 0 = 4$ ✓
équation 2 : $(-2) \times (-5) + 2 \times (-2) + (-2) \times 0 = 10 - 4 + 0 = 6$ ✓
équation 3 : $(-2) \times (-5) + 3 \times (-2) + (-4) \times 0 = 10 - 6 + 0 = 4$ ✓
équation 4 : $(-4) \times (-5) + 2 \times (-2) + 2 \times 0 = 20 - 4 + 0 = 16$ ✓

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{16}$ admet une **solution unique** : $x = -5$, $y = -2$, $z = 0$, soit

$$\mathbb{S} = \{(-5, -2, 0)\}.$$

Corrigé de l'exercice 17

4 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{17} : \begin{cases} -x - 2z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 3x + 3y + 6z = 9 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par -1.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 0=0$; $(-1)\times(-2)=2$; $(-1)\times(-3)=3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ \textcircled{1} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $1-1\times 0=1$; $2-1\times 2=0$; $3-1\times 3=0$.

Transformation 3. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $-2-1\times 0=-2$; $2-1\times 2=0$; $3-1\times 3=0$.

Transformation 4. Pour annuler le 3 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \\ \textcircled{3} & 3 & 6 & 9 & \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $3 - 3 \times 0 = 3$; $6 - 3 \times 2 = 0$; $9 - 3 \times 3 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \\ 0 & \textcircled{-2} & 0 & 0 & \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $0 + 2 \times 0 = 0$; $0 + 2 \times 0 = 0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 6. Pour annuler le 3 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 trois fois la ligne L_2 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \textcircled{3} & 0 & 0 & \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $0 - 3 \times 0 = 0$; $0 - 3 \times 0 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. Les lignes L_3, L_4 sont entièrement nulles, seconds membres compris : elles traduisent l'équation $0 = 0$, toujours vraie.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{17} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée par substitution va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations ; les lignes nulles, qui traduisent l'équation $0 = 0$, n'apportent aucune information et disparaissent :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : z.

Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Dernière équation. L'équation $y = 0$ donne directement $y = 0$.

Équation 1. L'équation $x + 2z = 3$ donne $x = 3 - 2z$. On remplace les variables libres par leurs paramètres :

$$x = 3 - 2\alpha.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Chaque variable principale est maintenant exprimée en fonction des paramètres :

$$\begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : (-1) \times 1 + (-2) \times 1 = -1 - 2 = -3 \checkmark \\ &\text{équation 2} : 1 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 1 = 1 + 0 + 2 = 3 \checkmark \\ &\text{équation 3} : 1 \times 1 + (-2) \times 0 + 2 \times 1 = 1 + 0 + 2 = 3 \checkmark \\ &\text{équation 4} : 3 \times 1 + 3 \times 0 + 6 \times 1 = 3 + 0 + 6 = 9 \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{17}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (3 - 2\alpha, 0, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 18

4 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{18} : \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 2y - 4z = 2 \\ 2x + 6y - 6z = 6 \\ -2x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 2 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -6 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & -6 & 6 \\ -2 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 1. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ \textcircled{2} & 6 & -6 & 6 \\ -2 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $6-2\times 2=2$; $-6-2\times(-2)=-2$; $6-2\times 2=2$.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ \textcircled{-2} & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $-2+2\times 2=2$; $-4+2\times(-2)=-8$; $1+2\times 2=5$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2=1$; $\frac{1}{2}\times(-4)=-2$; $\frac{1}{2}\times 2=1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-2&2\\0&\boxed{1}&-2&1\\0&\textcircled{2}&-2&2\\0&2&-8&5\end{array}\right)\xrightarrow[O_3]{L_3-2L_2}\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-2&2\\0&1&-2&1\\0&0&2&0\\0&2&-8&5\end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $-2-2\times(-2)=2$; $2-2\times 1=0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 5. Pour annuler le 2 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 deux fois la ligne L_2 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-2&2\\0&\boxed{1}&-2&1\\0&0&2&0\\0&\textcircled{2}&-8&5\end{array}\right)\xrightarrow[O_3]{L_4-2L_2}\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-2&2\\0&1&-2&1\\0&0&2&0\\0&0&-4&3\end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $-8-2\times(-2)=-4$; $5-2\times 1=3$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-2&2\\0&1&-2&1\\0&0&\boxed{2}&0\\0&0&-4&3\end{array}\right)\xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3}\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-2&2\\0&1&-2&1\\0&0&1&0\\0&0&-4&3\end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2=1$; $\frac{1}{2}\times 0=0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 7. Pour annuler le -4 de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 quatre fois la ligne L_3 (car $-4+4\times 1=0$).

$$\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-2&2\\0&1&-2&1\\0&0&\boxed{1}&0\\0&0&\textcircled{-4}&3\end{array}\right)\xrightarrow[O_3]{L_4+4L_3}\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-2&2\\0&1&-2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-4+4\times 1=0$; $3+4\times 0=3$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, les lignes restantes ne contiennent plus que des zéros, mais leur second membre n'est pas nul : chacune traduit une **équation impossible**. On fait apparaître un pivot dans la colonne des constantes (et des zéros sous lui) pour lire correctement le rang de $A|B$. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut 3. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_4 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 8. Multiplication de L_4 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_4} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$.

La colonne des constantes est traitée.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 4, donc $\text{rang}(A|B) = 4$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = 3 \neq \text{rang}(A|B) = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{18} \text{ est incompatible.}$$

En effet, la ligne L_4 de $A_e|B_e$ est de la forme $(0 \cdots 0 \mid 1)$: elle traduit l'équation

$$0x + 0y + 0z = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 = 1,$$

ce qui est **impossible**. Aucune valeur des inconnues ne peut vérifier cette équation : il est donc inutile de poursuivre avec la remontée.

Le système $\mathcal{S}_{18}$ est incompatible :

$$\mathrm{S} = \emptyset.$$

Corrigé de l'exercice 19

4 équations, 4 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{19} : \begin{cases} 3x - 6y - 9z - 6t = 3 \\ -x + 3y + z = 2 \\ -2x + 6y + 4z + 4t = 0 \\ x - 3y + z + 5t = -8 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 4$ inconnues (x, y, z, t).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : t n'apparaît pas dans l'équation 2 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 & -6 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -9 & -6 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 3. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & -6 & -9 & -6 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$; $\frac{1}{3} \times (-6) = -2$; $\frac{1}{3} \times (-9) = -3$; $\frac{1}{3} \times (-6) = -2$; $\frac{1}{3} \times 3 = 1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le -1 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -3 & -2 & 1 \\ \textcircled{-1} & 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $3 + 1 \times (-2) = 1$; $1 + 1 \times (-3) = -2$; $0 + 1 \times (-2) = -2$; $2 + 1 \times 1 = 3$.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ \textcircled{-2} & 6 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $6 + 2 \times (-2) = 2$; $4 + 2 \times (-3) = -2$; $4 + 2 \times (-2) = 0$; $0 + 2 \times 1 = 2$.

Transformation 4. Pour annuler le 1 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ (1) & -3 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 7 & -9 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-3 - 1 \times (-2) = -1$; $1 - 1 \times (-3) = 4$; $5 - 1 \times (-2) = 7$; $-8 - 1 \times 1 = -9$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -2 & 3 \\ 0 & (2) & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 7 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 7 & -9 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-2 - 2 \times (-2) = 2$; $0 - 2 \times (-2) = 4$; $2 - 2 \times 3 = -4$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 6. Pour annuler le -1 de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_2 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & (-1) & 4 & 7 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 + L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $4 + 1 \times (-2) = 2$; $7 + 1 \times (-2) = 5$; $-9 + 1 \times 3 = -6$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 7. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 4 = 2$; $\frac{1}{2} \times (-4) = -2$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 8. Pour annuler le 2 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 deux fois la ligne L_3 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 5 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $5 - 2 \times 2 = 1$; $-6 - 2 \times (-2) = -2$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 4. On cherche le pivot sur la ligne L_4. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne 4 (coefficients de t) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 4, donc $\text{rang}(A|B) = 4$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 4, donc $\text{rang}(A) = 4$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 4 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{19} \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée par substitution va donner.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 2y - 3z - 2t = 1 \\ y - 2z - 2t = 3 \\ z + 2t = -2 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

Dernière équation. L'équation $t = -2$ donne directement $t = -2$.

Équation 3. L'équation $z + 2t = -2$ donne $z = -2 - 2t$. On remplace t par -2 :

$$z = -2 - 2 \times (-2) \;=\; 2.$$

Équation 2. L'équation $y - 2z - 2t = 3$ donne $y = 3 + 2z + 2t$. On remplace z par 2, t par -2 :

$$y = 3 + 2 \times 2 + 2 \times (-2) \;=\; 3.$$

Équation 1. L'équation $x - 2y - 3z - 2t = 1$ donne $x = 1 + 2y + 3z + 2t$. On remplace y par 3, z par 2, t par -2 :

$$x = 1 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times (-2) \;=\; 9.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Toutes les inconnues sont maintenant connues.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned}
&\text{équation 1} : 3\times 9+(-6)\times 3+(-9)\times 2+(-6)\times(-2)\\
&\qquad = 27-18-18+12=3\ \checkmark\\
&\text{équation 2} : (-1)\times 9+3\times 3+1\times 2=-9+9+2=2\ \checkmark\\
&\text{équation 3} : (-2)\times 9+6\times 3+4\times 2+4\times(-2)\\
&\qquad = -18+18+8-8=0\ \checkmark\\
&\text{équation 4} : 1\times 9+(-3)\times 3+1\times 2+5\times(-2)\\
&\qquad = 9-9+2-10=-8\ \checkmark
\end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{19}$ admet une **solution unique** : $x=9$, $y=3$, $z=2$, $t=-2$, soit

$$\mathbb{S}=\{(9,3,2,-2)\}.$$

Corrigé de l'exercice 20

4 équations, 4 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{20}:\begin{cases}
2x- & 2y+2z+2t=-2\\
 & -2y+2z-4t=0\\
4x- & 2y+2z+8t=-4\\
2x- & y+2z+3t=-4
\end{cases}$$

Il comporte $n=4$ équations et $m=4$ inconnues (x,y,z,t).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 2 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 8 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 8 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 8 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 2. Pour annuler le 4 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 quatre fois la ligne L_1 (car $4-4\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0\\ \textcircled{4} & -2 & 2 & 8 & -4\\ 2 & -1 & 2 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-4L_1} \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 4 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $4-4\times 1=0$; $-2-4\times(-1)=2$; $2-4\times 1=-2$; $8-4\times 1=4$; $-4-4\times(-1)=0$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 4 & 0\\ \textcircled{2} & -1 & 2 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4-2L_1} \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $-1-2\times(-1)=1$; $2-2\times 1=0$; $3-2\times 1=1$; $-4-2\times(-1)=-2$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss tel que nous l'appliquons, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & \boxed{-2} & 2 & -4 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times 2=-1$; $-\frac{1}{2}\times(-4)=2$; $-\frac{1}{2}\times 0=0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 0\\ 0 & \textcircled{2} & -2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-2L_2} \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $-2-2\times(-1)=0$; $4-2\times 2=0$; $0-2\times 0=0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 6. Pour annuler le 1 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times (-1) = 1$; $1 - 1 \times 2 = -1$; $-2 - 1 \times 0 = -2$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. Le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_4, située plus bas, a un coefficient non nul (1) dans cette colonne : on échange L_3 et L_4 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 7. Permutation des lignes L_3 et L_4.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Le coefficient de L_4 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_4 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 < m = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{20} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée par substitution va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée par substitution

On réécrit la forme échelonnée $A_e|B_e$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = -1 \\ y - z + 2t = 0 \\ z - t = -2 \end{cases}$$

Ce système est **triangulaire** : chaque équation commence par une inconnue qui n'apparaît dans aucune des équations situées au-dessous. On le résout donc **en partant de la dernière équation et en remontant** : chaque équation donne une inconnue, dans laquelle on remplace les valeurs déjà trouvées.

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y, z ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : t.

Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $t = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Dernière équation. L'équation $z - t = -2$ donne $z = -2 + t$. On remplace les variables libres par leurs paramètres :

$$z = -2 + \alpha.$$

Équation 2. L'équation $y - z + 2t = 0$ donne $y = z - 2t$. On remplace z par $-2 + \alpha$ et les variables libres par leurs paramètres :

$$y = (-2 + \alpha) - 2\alpha = -2 \ - \ \alpha.$$

Équation 1. L'équation $x - y + z + t = -1$ donne $x = -1 + y - z - t$. On remplace y par $-2 - \alpha$, z par $-2 + \alpha$ et les variables libres par leurs paramètres :

$$x = -1 + (-2 - \alpha) - (-2 + \alpha) - \alpha = -1 \ - \ 3\alpha.$$

Étape 5 Ensemble des solutions

Chaque variable principale est maintenant exprimée en fonction des paramètres :

$$\begin{cases} x = -1 - 3\alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = -2 + \alpha \\ t = \alpha \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = -4$, $y = -3$, $z = -1$, $t = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : 2 \times (-4) + (-2) \times (-3) + 2 \times (-1) + 2 \times 1 \\ &\qquad = -8 + 6 - 2 + 2 = -2 \checkmark \\ &\text{équation 2} : (-2) \times (-3) + 2 \times (-1) + (-4) \times 1 = 6 - 2 - 4 = 0 \checkmark \\ &\text{équation 3} : 4 \times (-4) + (-2) \times (-3) + 2 \times (-1) + 8 \times 1 \\ &\qquad = -16 + 6 - 2 + 8 = -4 \checkmark \\ &\text{équation 4} : 2 \times (-4) + (-1) \times (-3) + 2 \times (-1) + 3 \times 1 \\ &\qquad = -8 + 3 - 2 + 3 = -4 \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{20}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \left\{ (-1 - 3\alpha, -2 - \alpha, -2 + \alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Bilan de la série

Les vingt exercices couvrent tous les cas : solution unique, infinité de solutions (avec un ou deux paramètres) et absence de solution, pour des systèmes carrés comme rectangulaires.

Ce qu'il faut retenir

— La méthode de Gauss, c'est une **descente** (pivots ramenés à 1, zéros au-dessous), suivie d'une **remontée par substitution**.

— La forme échelonnée $A_e|B_e$ donne les **rangs**, donc la nature du système ; réécrite en système, elle est **triangulaire**.

— On résout ce système triangulaire **de bas en haut** : la dernière équation donne une inconnue, que l'on remplace dans l'équation du dessus, et ainsi de suite.

— Infinité de solutions : les colonnes sans pivot donnent les variables libres, remplacées par des paramètres **avant** la remontée.

— Aucune solution : une ligne $(0 \cdots 0 \mid d)$ avec $d \neq 0$ traduit l'équation impossible $0 = d$; on s'arrête après la descente.

— La substitution demande des calculs à la main ; la série 8 montrera comment les éviter en poursuivant les opérations élémentaires (Gauss-Jordan).

Récapitulatif des résultats

Ex.	n	m	rang(A)	rang$(A\|B)$	Nature	Solutions
1	3	3	3	3	compatible déterminé	$\{(7,1,-1)\}$
2	3	3	3	3	compatible déterminé	$\{(8,1,-2)\}$
3	3	3	2	2	compatible indéterminé	1 paramètre
4	3	3	2	3	incompatible	$\mathbb{S}=\emptyset$
5	2	2	2	2	compatible déterminé	$\{(3,0)\}$
6	2	2	2	2	compatible déterminé	$\{(3,0)\}$
7	2	2	1	2	incompatible	$\mathbb{S}=\emptyset$
8	2	3	2	2	compatible indéterminé	1 paramètre
9	3	2	2	2	compatible déterminé	$\{(-1,1)\}$
10	3	2	2	3	incompatible	$\mathbb{S}=\emptyset$
11	3	3	3	3	compatible déterminé	$\{(0,-3,-3)\}$
12	3	3	1	1	compatible indéterminé	2 paramètres
13	3	3	2	2	compatible indéterminé	1 paramètre
14	3	4	3	3	compatible indéterminé	1 paramètre
15	3	4	2	2	compatible indéterminé	2 paramètres
16	4	3	3	3	compatible déterminé	$\{(-5,-2,0)\}$
17	4	3	2	2	compatible indéterminé	1 paramètre
18	4	3	3	4	incompatible	$\mathbb{S}=\emptyset$
19	4	4	4	4	compatible déterminé	$\{(9,3,2,-2)\}$
20	4	4	3	3	compatible indéterminé	1 paramètre

Partie 3 : Quand les calculs se compliquent, MATLAB

▶ Les limites du calcul à la main

Pour échelonner à la main une matrice de n lignes et n colonnes, il faut de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$ multiplications : environ 9 pour $n = 3$, 333 pour $n = 10$ et plus de 2 600 pour $n = 20$. La remontée par substitution en demande encore de l'ordre de $\frac{n^2}{2}$. Chacune peut être source d'erreur : en gestion, où les systèmes comptent des dizaines d'équations, on confie ces calculs à un logiciel comme **MATLAB** (ou ses équivalents gratuits Octave et Python).

▶ La méthode de Gauss avec MATLAB

L'opérateur \ (« barre oblique inverse ») résout un système $AX = B$ dont la solution est unique. Pour cela, MATLAB applique précisément la méthode de cette série : une descente de Gauss, puis une remontée par substitution. Avant de l'utiliser, on vérifie avec `rank` que le système admet bien une solution unique.

Script MATLAB : exercice 1

```
A1 = [1 -2 2; 2 -6 6; -1 4 -1];
B1 = [3; 2; -2];
rA  = rank(A1)        % rang de A
rAB = rank([A1 B1])   % rang de A|B
X1 = A1 \ B1          % solution unique
```

Résultat affiché par MATLAB

```
rA =
     3
rAB =
     3
X1 =
     7
     1
    -1
```

▶ Programmer soi-même la remontée par substitution

La remontée par substitution s'écrit en quelques lignes. Le script ci-dessous part du système triangulaire de l'exercice 1 (U contient les coefficients de A_e et c les seconds membres de B_e) et calcule les inconnues de la dernière à la première, exactement comme à la main.

Script MATLAB : remontée par substitution

```
U = [1 -2 2; 0 1 -1; 0 0 1];   % forme echelonnee A_e
c = [3; 2; -1];                % seconds membres B_e
n = 3;
x = zeros(n, 1);
for i = n:-1:1                 % de la derniere equation a la premiere
```

```
6       x(i) = (c(i) - U(i, i+1:n) * x(i+1:n)) / U(i, i);
7   end
8   x
```

Résultat affiché par MATLAB

```
x =
     7
     1
    -1
```

Comment lire ces résultats

— $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m$: la solution est unique, et `A1 \ B1` la donne directement : $(7, 1, -1)$.

— La boucle `for` parcourt les équations de bas en haut (`n:-1:1`) : à chaque tour, on retranche du second membre les inconnues déjà trouvées, puis on divise par le pivot.

— Si $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|B)$ (exercice 4 : 2 et 3), le système est incompatible : il ne faut pas utiliser \.