Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

SÉRIE
8

SÉRIE D'EXERCICES CORRIGÉS

La méthode de Gauss-Jordan

Une descente (Gauss), puis une remontée (Jordan) jusqu'aux solutions

OBJECTIF

Résoudre complètement un système linéaire : descendre jusqu'à la forme échelonnée pour lire les rangs, puis remonter jusqu'à la forme échelonnée réduite pour lire les solutions.

20 systèmes linéaires | Corrigés détaillés pas à pas | Solution unique, infinité ou aucune

AU SOMMAIRE

Partie 1 **Énoncés** rappels du cours et 20 systèmes à résoudre

Partie 2 **Corrigés détaillés** démarche en six étapes pour chaque système

Bilan **Ce qu'il faut retenir** et récapitulatif des solutions

Partie 3 **MATLAB** quand les calculs se compliquent

MODULE	PROFESSEUR	ANNÉE UNIVERSITAIRE
Mathématiques pour la gestion	**Jaouad Madkour**	**2026–2027**

Partie 1 : Énoncés

► Rappels du cours

La série 7 a résolu les systèmes par une descente de Gauss suivie d'une remontée par substitution. L'algorithme de Gauss-Jordan propose une autre remontée : au lieu de substituer, il poursuit les opérations élémentaires jusqu'à une forme où les solutions se lisent directement.

Avant d'aborder les exercices, rappelons les deux formes échelonnées, les deux temps de l'algorithme de Gauss-Jordan et la démarche à suivre pour chaque système.

Matrice échelonnée en lignes : elle donne le rang

Une matrice est **échelonnée en lignes** lorsque :

— l'élément non nul le plus à gauche de chaque ligne, appelé **pivot**, se trouve à droite des pivots des lignes supérieures, et tous les éléments situés sous un pivot sont nuls ;

— les lignes nulles sont placées en bas de la matrice.

Le **rang** d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée.

Exemple : $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (rang 3)

Matrice échelonnée réduite en lignes : elle donne les solutions

Une matrice échelonnée est **réduite** lorsque, de plus, chaque pivot vaut 1 et c'est le **seul** élément non nul de sa colonne : les éléments situés **au-dessus** des pivots sont nuls eux aussi. Réécrite sous forme de système, elle donne **directement** les solutions.

Exemple : $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Algorithme de Gauss-Jordan : une descente, puis une remontée

L'algorithme de Gauss-Jordan **termine le travail commencé par l'algorithme de Gauss**. Il se déroule en deux temps.

Descente (Gauss). On traite les colonnes de gauche à droite, de haut en bas :

1. **Choix du pivot** : s'il est nul, on permute sa ligne avec une ligne située en dessous (O_1) ;
2. **Normalisation** : on ramène le pivot à 1 (O_2) ;
3. **Annulation au-dessous** : on fait apparaître des zéros sous le pivot (O_3).

On obtient la forme échelonnée $A_e|B_e$, sur laquelle on lit les rangs.

Remontée (Jordan). On part du dernier pivot et on remonte jusqu'au premier :

4. **Annulation au-dessus** : on fait apparaître des zéros au-dessus de chaque pivot (O_3).

On obtient la forme échelonnée réduite $A_r|B_r$, sur laquelle on lit les solutions.

Gauss trace la moitié du cercle en descendant ; Jordan le referme en remontant.

Rouché-Fontené : la nature du système se lit après la descente

Les rangs se lisent sur la forme échelonnée $A_e|B_e$ (m désigne le nombre d'inconnues) :

$\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(A|B) \quad \Longrightarrow$ **incompatible** : une ligne $(0 \ \cdots \ 0 \mid d)$, $d \neq 0$, et $\mathbb{S} = \emptyset$

$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = m \quad \Longrightarrow$ **compatible déterminé** : solution unique

$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) < m \quad \Longrightarrow$ **compatible indéterminé** : infinité de solutions

Si le système est incompatible, on s'arrête là : la remontée est inutile.

Lecture des solutions sur la forme échelonnée réduite

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système, en laissant de côté les lignes nulles ($0 = 0$).

— **Solution unique** : chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

— **Infinité de solutions** : les **variables principales** correspondent aux colonnes avec pivot et les **variables libres** aux colonnes sans pivot. On fait passer les variables libres à droite et on les remplace par des paramètres ($\alpha, \beta, \cdots \in \mathbb{R}$) : chaque variable principale s'exprime alors en fonction de ces paramètres.

△ ! Précaution essentielle : le même ordre des inconnues partout

Avant d'écrire la matrice des coefficients A, il faut que **les inconnues apparaissent dans le même ordre dans toutes les équations** (x, puis y, puis z, puis t). Sinon, les coefficients sont rangés dans les mauvaises colonnes : la matrice A est **fausse**, et tous les résultats qui suivent (rangs, nature du système, solutions) le sont aussi.

1. Réécrire chaque équation en plaçant les inconnues dans l'ordre x, y, z, t.
2. Lorsqu'une inconnue n'apparaît pas dans une équation, son coefficient est 0 : on écrit ce 0 dans la matrice.
3. Le vecteur X accueille les inconnues **dans ce même ordre** : la première colonne de A correspond à la première inconnue de X, la deuxième colonne à la deuxième inconnue, etc.

Exemple.

$$\underbrace{\begin{cases} 2y + x = 5 \\ x - z = 1 \\ 3z + y - x = 2 \end{cases}}_{\text{inconnues dans le désordre}} \Longrightarrow \underbrace{\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - z = 1 \\ -x + y + 3z = 2 \end{cases}}_{\text{inconnues remises dans l'ordre}}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Erreur fréquente : recopier la première équation telle qu'elle est écrite donnerait la ligne $(2 \;\; 1 \;\; 0)$, qui correspond à $2x + y$: c'est un autre système !

Démarche à suivre pour chaque système

1. **Forme matricielle** : écrire $AX = B$ puis former la matrice augmentée $A|B$.
2. **Descente (Gauss)** : réduire $A|B$ à sa forme échelonnée, notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée »).
3. **Nature du système** : lire $\text{rang}(A)$ et $\text{rang}(A|B)$ sur $A_e|B_e$ et conclure avec le théorème de Rouché-Fontené. Si le système est incompatible, $\mathbb{S} = \emptyset$ et on s'arrête là.
4. **Remontée (Jordan)** : en partant du dernier pivot, annuler les éléments situés au-dessus des pivots, jusqu'à la forme échelonnée réduite, notée $A_r|B_r$ (l'indice r signifie « réduite »).
5. **Retour au système** : réécrire $A_r|B_r$ sous forme de système et lire directement l'ensemble des solutions $\mathbb{S}$.
6. **Vérification** : remplacer la solution trouvée (ou une solution particulière) dans chaque équation du système de départ.

Rappel : les trois opérations élémentaires sur les lignes

O_1	Permuter deux lignes de la matrice	$L_i \leftrightarrow L_j$
O_2	Multiplier une ligne par une constante *non nulle* α	$\alpha\, L_i \quad (\alpha \neq 0)$
O_3	Ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne	$L_i + \beta\, L_j \quad (j \neq i)$

Consigne commune

Résoudre chacun des systèmes linéaires suivants par l'**algorithme de Gauss-Jordan**, sans utiliser la substitution, en suivant les six étapes de la démarche. Effectuer **une seule opération élémentaire à la fois** et donner l'ensemble des solutions $\mathbb{S}$.

▶ Les exercices

Exercice 1 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} -x - y + 3z = 0 \\ -x - 2y + 6z = 0 \\ -x - 2z = -2 \end{cases}$$

corrigé p. 7 →

Exercice 2 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} 2y - 2z = -4 \\ 2x - 4y = -2 \\ -6x + 6y + 8z = 24 \end{cases}$$

corrigé p. 12 →

Exercice 3 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} -2x + 2y = -12 \\ 2x - 4y - 2z = 6 \\ -2x + 6y + 4z = 0 \end{cases}$$

corrigé p. 16 →

Exercice 4 — 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_4 : \begin{cases} x + 3y - 3z = 3 \\ -x - 5y - 3z = 5 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$$

corrigé p. 21 →

Exercice 5 — 2 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_5 : \begin{cases} -2x + 2y = 8 \\ 2x = -4 \end{cases}$$

corrigé p. 23 →

Exercice 6 — 2 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_6 : \begin{cases} -2y = 0 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$$

corrigé p. 27 →

Exercice 7 — 2 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_7 : \begin{cases} -2x + 4y = 2 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases}$$

corrigé p. 30 →

Exercice 8 — 2 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_8 : \begin{cases} -2x - 4y - 4z = -2 \\ -4x - 7y - 8z = -5 \end{cases}$$

corrigé p. 32 →

Exercice 9 — 3 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_9 : \begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ -2x - 9y = 8 \\ 2x + 7y = -4 \end{cases}$$

corrigé p. 36 →

Exercice 10 — 3 équations, 2 inconnues

$$\mathcal{S}_{10} : \begin{cases} 2x = 6 \\ -x - y = -1 \\ 3x + 7y = -4 \end{cases}$$

corrigé p. 39 →

Exercice 11 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{11} : \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -3x - 3y + 8z = -2 \\ x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$$

corrigé p. 42 →

Exercice 12 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{12} : \begin{cases} -3x - 6y - 9z = 3 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ -2x - 4y - 6z = 2 \end{cases}$$

corrigé p. 47 →

Exercice 13 3 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{13} : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y + z = 4 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \end{cases}$$

corrigé p. 50 →

Exercice 14 3 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{14} : \begin{cases} 2x - 4y - 6z - 4t = 4 \\ -2x + 3y + 3z + 4t = -7 \\ -2x + y - 4z + 7t = -15 \end{cases}$$

corrigé p. 54 →

Exercice 15 3 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{15} : \begin{cases} x - 3y + 3z - t = 2 \\ 2x - 5y + 5z - 3t = 7 \\ -3x + 8y - 8z + 4t = -9 \end{cases}$$

corrigé p. 59 →

Exercice 16 4 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{16} : \begin{cases} 3y - 5z = -2 \\ y - z = -2 \\ -x + 2y - 4z = -1 \\ -x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

corrigé p. 63 →

Exercice 17 4 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{17} : \begin{cases} -2x + 2y + 2z = -2 \\ -2x - 2y + 2z = -6 \\ 3x + 4y - 3z = 10 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

corrigé p. 68 →

Exercice 18 4 équations, 3 inconnues

$$\mathcal{S}_{18} : \begin{cases} 2x + 2y - 2z = -6 \\ 6x + 5y - 2z = -7 \\ 4x + 3y - 3z = -10 \\ 3y - 3z = -5 \end{cases}$$

corrigé p. 73 →

Exercice 19 4 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{19} : \begin{cases} -2x + 4y - 4z + 2t = 0 \\ x - y + 2z + t = -1 \\ -2x + 4y - 2z - 4t = 2 \\ -x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$$

corrigé p. 78 →

Exercice 20 4 équations, 4 inconnues

$$\mathcal{S}_{20} : \begin{cases} -x + 2z - t = -3 \\ -2x + 5z - 2t = -3 \\ 2x + 2y - 4z + 4t = 10 \\ 3x + 6y - 5z + 9t = 24 \end{cases}$$

corrigé p. 84 →

Partie 2 : Corrigés détaillés

Conventions de lecture

— Les lignes de chaque matrice sont notées $L_1, L_2, L_3, \ldots$ selon leur position dans la matrice *actuelle* : après chaque étape, la numérotation repart de L_1.

— Au-dessus de chaque flèche figure la transformation effectuée ; en dessous, le code de l'opération élémentaire (O_1, O_2 ou O_3).

— Chaque opération porte sur **toute la ligne**, second membre compris ; la nouvelle ligne est calculée **coefficient par coefficient**, de gauche à droite.

$\boxed{2}$ pivot en cours d'utilisation (encadré en bleu)

$\textcircled{-3}$ nombre à annuler, au-dessous ou au-dessus du pivot (entouré en orange)

1 pivot des formes échelonnée $A_e|B_e$ et échelonnée réduite $A_r|B_r$ (en rouge)

Corrigé de l'exercice 1

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} -x - y + 3z = 0 \\ -x - 2y + 6z = 0 \\ -x - 2z = -2 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 3 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par -1.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 3 = -3$; $(-1) \times 0 = 0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le -1 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -3 & 0 \\ \textcircled{-1} & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $-2 + 1 \times 1 = -1$; $6 + 1 \times (-3) = 3$; $0 + 1 \times 0 = 0$.

Transformation 3. Pour annuler le -1 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ (-1) & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $0+1\times 1=1$; $-2+1\times(-3)=-5$; $-2+1\times 0=-2$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 3=-3$; $(-1)\times 0=0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & (1) & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $-5-1\times(-3)=-2$; $-2-1\times 0=-2$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_1 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 7. Pour annuler le -3 de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 trois fois la ligne L_3 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \textcircled{-3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+3L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3+3\times 1=0$; $0+3\times 1=3$.

Transformation 8. Pour annuler le -3 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 trois fois la ligne L_3 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \textcircled{-3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1+3L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3+3\times 1=0$; $0+3\times 1=3$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 9. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $3 - 1 \times 3 = 0$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned}
&\text{équation 1} : (-1)\times 0+(-1)\times 3+3\times 1 = 0-3+3 = 0 \checkmark\\
&\text{équation 2} : (-1)\times 0+(-2)\times 3+6\times 1 = 0-6+6 = 0 \checkmark\\
&\text{équation 3} : (-1)\times 0+(-2)\times 1 = 0-2 = -2 \checkmark
\end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_1$ admet une **solution unique** : $x = 0$, $y = 3$, $z = 1$, soit

$$\mathbb{S} = \{(0,3,1)\}.$$

Corrigé de l'exercice 2

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} 2y - 2z = -4 \\ 2x - 4y = -2 \\ -6x + 6y + 8z = 24 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 ; z n'apparaît pas dans l'équation 2 : les coefficients correspondants valent 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -6 & 6 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & 0 & -2 \\ -6 & 6 & 8 & 24 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_2, située plus bas, a un coefficient non nul (2) dans cette colonne : on échange L_1 et L_2 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & 0 & -2 \\ -6 & 6 & 8 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ -6 & 6 & 8 & 24 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 2. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ -6 & 6 & 8 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ -6 & 6 & 8 & 24 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-4) = -2$; $\frac{1}{2} \times 0 = 0$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 3. Pour annuler le -6 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 six fois la ligne L_1 (car $-6 + 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ \textcircled{-6} & 6 & 8 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 6L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & 8 & 18 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-6 + 6 \times 1 = 0$; $6 + 6 \times (-2) = -6$; $8 + 6 \times 0 = 8$; $24 + 6 \times (-1) = 18$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & -4 \\ 0 & -6 & 8 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 8 & 18 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times (-4) = -2$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le -6 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 six fois la ligne L_2 (car $-6 + 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & \textcircled{-6} & 8 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 6L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-6 + 6 \times 1 = 0$; $8 + 6 \times (-1) = 2$; $18 + 6 \times (-2) = 6$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 6 = 3$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -2 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_2 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 7. Pour annuler le -1 de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_3 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $-2+1\times 3=1$.

Le coefficient de L_1 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 8. Pour annuler le -2 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 deux fois la ligne L_2 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1+2L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $0+2\times 0=0$; $-1+2\times 1=1$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : 2 \times 1 + (-2) \times 3 = 2 - 6 = -4 \ \checkmark \\ &\text{équation 2} : 2 \times 1 + (-4) \times 1 = 2 - 4 = -2 \ \checkmark \\ &\text{équation 3} : (-6) \times 1 + 6 \times 1 + 8 \times 3 = -6 + 6 + 24 = 24 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_2$ admet une **solution unique** : $x = 1$, $y = 1$, $z = 3$, soit

$$\mathbb{S} = \{(1, 1, 3)\}.$$

Corrigé de l'exercice 3

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} -2x + 2y = -12 \\ 2x - 4y - 2z = 6 \\ -2x + 6y + 4z = 0 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : z n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & -12 \\ 2 & -4 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 2 & 0 & -12 \\ 2 & -4 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$; $-\frac{1}{2} \times 0 = 0$; $-\frac{1}{2} \times (-12) = 6$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 6 \\ \textcircled{2} & -4 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-4 - 2 \times (-1) = -2$; $-2 - 2 \times 0 = -2$; $6 - 2 \times 6 = -6$.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ \textcircled{-2} & 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $6+2\times(-1)=4$; $4+2\times 0=4$; $0+2\times 6=12$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times(-6)=3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le 4 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 quatre fois la ligne L_2 (car $4-4\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & \textcircled{4} & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-4L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $4-4\times 1=0$; $4-4\times 1=0$; $12-4\times 3=0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0=0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 0 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_3 \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 6. Pour annuler le -1 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $0 + 1 \times 1 = 1$; $6 + 1 \times 3 = 9$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + z = 9 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : z.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = 9 - \alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = 8$, $y = 2$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1 : } (-2) \times 8 + 2 \times 2 = -16 + 4 = -12 \ \checkmark \\ &\text{équation 2 : } 2 \times 8 + (-4) \times 2 + (-2) \times 1 = 16 - 8 - 2 = 6 \ \checkmark \\ &\text{équation 3 : } (-2) \times 8 + 6 \times 2 + 4 \times 1 = -16 + 12 + 4 = 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_3$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \left\{ (9 - \alpha, 3 - \alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 4

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_4 : \begin{cases} x + 3y - 3z = 3 \\ -x - 5y - 3z = 5 \\ x + 4y \quad\quad = 0 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : z n'apparaît pas dans l'équation 3 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le -1 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -3 & 3 \\ \textcircled{-1} & -5 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $-5 + 1 \times 3 = -2$; $-3 + 1 \times (-3) = -6$; $5 + 1 \times 3 = 8$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 8 \\ \textcircled{1} & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $4 - 1 \times 3 = 1$; $0 - 1 \times (-3) = 3$; $0 - 1 \times 3 = -3$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{-2} & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times (-6) = 3$; $-\frac{1}{2} \times 8 = -4$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -4 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $3 - 1 \times 3 = 0$; $-3 - 1 \times (-4) = 1$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. Le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) vaut 0, de même que ceux des lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot**. On passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_3.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, les lignes restantes ne contiennent plus que des zéros, mais leur second membre n'est pas nul : chacune traduit une **équation impossible**. On fait apparaître un pivot dans la colonne des constantes (et des zéros sous lui) pour lire correctement le rang de $A|B$. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

La colonne des constantes est traitée.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & -3 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|B) = 3 \implies \mathcal{S}_4 \text{ est incompatible.}$$

En effet, la ligne L_3 de $A_e|B_e$ est de la forme $(0 \cdots 0 \mid 1)$: elle traduit l'équation

$$0x + 0y + 0z = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 = 1,$$

ce qui est **impossible**. Aucune valeur des inconnues ne peut vérifier cette équation : il est donc inutile de poursuivre avec la remontée.

Le système $\mathcal{S}_4$ est incompatible :

$$S = \emptyset.$$

Corrigé de l'exercice 5

2 équations, 2 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_5 : \begin{cases} -2x + 2y = 8 \\ 2x = -4 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 2 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{-2} & 2 & 8 \\ 2 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$; $-\frac{1}{2} \times 8 = -4$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & -4 \\ \textcircled{2} & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $0 - 2 \times (-1) = 2$; $-4 - 2 \times (-4) = 4$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 4 = 2$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & -1 & -4 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_5 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 4. Pour annuler le -1 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \textcircled{-1} & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $-4 + 1 \times 2 = -2$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \end{array}\right.$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1} : (-2) \times (-2) + 2 \times 2 = 4 + 4 = 8 \checkmark$$
$$\text{équation 2} : 2 \times (-2) = -4 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_5$ admet une **solution unique** : $x = -2$, $y = 2$, soit

$$\mathbb{S} = \{(-2, 2)\}.$$

Corrigé de l'exercice 6

2 équations, 2 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_6 : \begin{cases} -2y = 0 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_2, située plus bas, a un coefficient non nul (2) dans cette colonne : on échange L_1 et L_2 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 2. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 6 = 3$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 0 = 0$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 3 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_6 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 4. Pour annuler le 3 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 trois fois la ligne L_2 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \textcircled{3} & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 3L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $-1 - 3 \times 0 = -1$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1} : (-2) \times 0 = 0 \checkmark$$
$$\text{équation 2} : 2 \times (-1) + 6 \times 0 = -2 + 0 = -2 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_6$ admet une **solution unique** : $x = -1$, $y = 0$, soit

$$\mathbb{S} = \{(-1, 0)\}.$$

Corrigé de l'exercice 7

2 équations, 2 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_7 : \begin{cases} -2x + 4y = 2 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{-2} & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times 4=-2$; $-\frac{1}{2}\times 2=-1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & -1 \\ \textcircled{-2} & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $4+2\times(-2)=0$; $4+2\times(-1)=2$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) vaut 0, de même que ceux des lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot**. On passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_2.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, les lignes restantes ne contiennent plus que des zéros, mais leur second membre n'est pas nul : chacune traduit une **équation impossible**. On fait apparaître un pivot dans la colonne des constantes (et des zéros sous lui) pour lire correctement le rang de $A|B$. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2=1$.

La colonne des constantes est traitée.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 1, donc $\text{rang}(A) = 1$.

$$\text{rang}(A) = 1 \neq \text{rang}(A|B) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_7 \text{ est incompatible.}$$

En effet, la ligne L_2 de $A_e|B_e$ est de la forme $(0 \cdots 0 \mid 1)$: elle traduit l'équation

$$0x + 0y = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 = 1,$$

ce qui est **impossible**. Aucune valeur des inconnues ne peut vérifier cette équation : il est donc inutile de poursuivre avec la remontée.

Le système $\mathcal{S}_7$ est incompatible :

$$\mathrm{S} = \emptyset.$$

Corrigé de l'exercice 8

2 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_8 : \begin{cases} -2x - 4y - 4z = -2 \\ -4x - 7y - 8z = -5 \end{cases}$$

Il comporte $n = 2$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -4 & -7 & -8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -4 & -2 \\ -4 & -7 & -8 & -5 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & -4 & -4 & -2 \\ -4 & -7 & -8 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & -7 & -8 & -5 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times (-4) = 2$; $-\frac{1}{2} \times (-4) = 2$; $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le -4 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 quatre fois la ligne L_1 (car $-4 + 4 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 \\ \textcircled{-4} & -7 & -8 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 4L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-4 + 4 \times 1 = 0$; $-7 + 4 \times 2 = 1$; $-8 + 4 \times 2 = 0$; $-5 + 4 \times 1 = -1$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\operatorname{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\operatorname{rang}(A) = 2$.

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_8 \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 deux fois la ligne L_2 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{2} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $2 - 2 \times 0 = 2$; $1 - 2 \times (-1) = 3$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : z.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = -1 \\ z = \alpha \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1} : (-2) \times 1 + (-4) \times (-1) + (-4) \times 1 = -2 + 4 - 4 = -2 \checkmark$$
$$\text{équation 2} : (-4) \times 1 + (-7) \times (-1) + (-8) \times 1 = -4 + 7 - 8 = -5 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_8$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (3 - 2\alpha, -1, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 9

3 équations, 2 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_9 : \begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ -2x - 9y = 8 \\ 2x + 7y = -4 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -2 & -9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -6 & 2 \\ -2 & -9 & 8 \\ 2 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{-2} & -6 & 2 \\ -2 & -9 & 8 \\ 2 & 7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -9 & 8 \\ 2 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times (-6) = 3$; $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}\boxed{1} & 3 & -1\\ \textcircled{-2} & -9 & 8\\ 2 & 7 & -4\end{array}\right)\xrightarrow[O_3]{L_2+2L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 6\\ 2 & 7 & -4\end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $-9+2\times 3=-3$; $8+2\times(-1)=6$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}\boxed{1} & 3 & -1\\ 0 & -3 & 6\\ \textcircled{2} & 7 & -4\end{array}\right)\xrightarrow[O_3]{L_3-2L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 6\\ 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $7-2\times 3=1$; $-4-2\times(-1)=-2$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -3. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{3}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & -1\\ 0 & \boxed{-3} & 6\\ 0 & 1 & -2\end{array}\right)\xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{3}L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{3}\times(-3)=1$; $-\frac{1}{3}\times 6=-2$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & -1\\ 0 & \boxed{1} & -2\\ 0 & \textcircled{1} & -2\end{array}\right)\xrightarrow[O_3]{L_3-L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $-2-1\times(-2)=0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 3 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_9 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 6. Pour annuler le 3 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 trois fois la ligne L_2 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \textcircled{3} & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $-1 - 3 \times (-2) = 5$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : (-2) \times 5 + (-6) \times (-2) = -10 + 12 = 2 \ \checkmark \\ &\text{équation 2} : (-2) \times 5 + (-9) \times (-2) = -10 + 18 = 8 \ \checkmark \\ &\text{équation 3} : 2 \times 5 + 7 \times (-2) = 10 - 14 = -4 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_9$ admet une **solution unique** : $x = 5$, $y = -2$, soit

$$\mathbb{S} = \{(5, -2)\}.$$

Corrigé de l'exercice 10

3 équations, 2 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{10} : \begin{cases} 2x = 6 \\ -x - y = -1 \\ 3x + 7y = -4 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 2$ inconnues (x, y).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 0 = 0$; $\frac{1}{2} \times 6 = 3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le -1 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 3 \\ \textcircled{-1} & -1 & -1 \\ 3 & 7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $-1 + 1 \times 0 = -1$; $-1 + 1 \times 3 = 2$.

Transformation 3. Pour annuler le 3 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ \textcircled{3} & 7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -13 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $7 - 3 \times 0 = 7$; $-4 - 3 \times 3 = -13$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 7 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -13 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 2 = -2$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le 7 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 sept fois la ligne L_2 (car $7 - 7 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & \textcircled{7} & -13 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 7L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $7 - 7 \times 1 = 0$; $-13 - 7 \times (-2) = 1$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, les lignes restantes ne contiennent plus que des zéros, mais leur second membre n'est pas nul : chacune traduit une **équation impossible**. On fait apparaître un pivot dans la colonne des constantes (et des zéros sous lui) pour lire correctement le rang de $A|B$. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

La colonne des constantes est traitée.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\operatorname{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\operatorname{rang}(A) = 2$.

$$\operatorname{rang}(A) = 2 \neq \operatorname{rang}(A|B) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{10} \text{ est incompatible.}$$

En effet, la ligne L_3 de $A_e|B_e$ est de la forme $(0 \cdots 0 \mid 1)$: elle traduit l'équation

$$0x + 0y = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 = 1,$$

ce qui est **impossible**. Aucune valeur des inconnues ne peut vérifier cette équation : il est donc inutile de poursuivre avec la remontée.

Le système $\mathcal{S}_{10}$ est incompatible :

$$\mathrm{S} = \emptyset.$$

Corrigé de l'exercice 11

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{11} : \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -3x - 3y + 8z = -2 \\ x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le -3 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 trois fois la ligne L_1 (car $-3 + 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -3 & 0 \\ \textcircled{-3} & -3 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 3L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3 + 3 \times 1 = 0$; $-3 + 3 \times 1 = 0$; $8 + 3 \times (-3) = -1$; $-2 + 3 \times 0 = -2$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ \textcircled{1} & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $2 - 1 \times 1 = 1$; $-5 - 1 \times (-3) = -2$; $1 - 1 \times 0 = 1$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_3, située plus bas, a un coefficient non nul (1) dans cette colonne : on échange L_2 et L_3 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 3. Permutation des lignes L_2 et L_3.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par -1.

Transformation 4. Multiplication de L_3 par -1.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times (-2) = 2$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{11} \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 5. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_3 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $1+2\times 2=5$.

Transformation 6. Pour annuler le -3 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 trois fois la ligne L_3 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1+3L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3+3\times 1=0$; $0+3\times 2=6$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 7. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $0-1\times 0=0$; $6-1\times 5=1$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : 1 \times 1 + 1 \times 5 + (-3) \times 2 = 1 + 5 - 6 = 0 \ \checkmark \\ &\text{équation 2} : (-3) \times 1 + (-3) \times 5 + 8 \times 2 = -3 - 15 + 16 = -2 \ \checkmark \\ &\text{équation 3} : 1 \times 1 + 2 \times 5 + (-5) \times 2 = 1 + 10 - 10 = 1 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{11}$ admet une **solution unique** : $x = 1$, $y = 5$, $z = 2$, soit

$$\mathbb{S} = \{(1, 5, 2)\}.$$

Corrigé de l'exercice 12

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{12} : \begin{cases} -3x - 6y - 9z = 3 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ -2x - 4y - 6z = 2 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & -9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -3. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{3}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-3} & -6 & -9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{3}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{3} \times (-3) = 1$; $-\frac{1}{3} \times (-6) = 2$; $-\frac{1}{3} \times (-9) = 3$; $-\frac{1}{3} \times 3 = -1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 2 & 3 & -1 \\ \textcircled{1} & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $2 - 1 \times 2 = 0$; $3 - 1 \times 3 = 0$; $-1 - 1 \times (-1) = 0$.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{-2} & -4 & -6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $-4 + 2 \times 2 = 0$; $-6 + 2 \times 3 = 0$; $2 + 2 \times (-1) = 0$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. Les lignes L_2, L_3 sont entièrement nulles, seconds membres compris : elles traduisent l'équation $0 = 0$, toujours vraie.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 1, donc $\text{rang}(A|B) = 1$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 1, donc $\text{rang}(A) = 1$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 1 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{12} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant du dernier pivot vers le premier, pour faire apparaître des **zéros au-dessus** de chaque pivot. Ici, tous les coefficients situés au-dessus des pivots sont déjà nuls : la forme échelonnée est déjà réduite, il n'y a rien à faire.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; les lignes nulles, qui traduisent l'équation $0 = 0$, n'apportent aucune information et disparaissent :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -1 \end{array}\right.$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x ;

— **Variables libres** (colonnes sans pivot) : y, z.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $y = \alpha$, $z = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 - 2\alpha - 3\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array}\right.$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$, $\beta = 1$: $x = -6$, $y = 1$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1} : (-3)\times(-6)+(-6)\times 1+(-9)\times 1 = 18-6-9 = 3 \checkmark$$
$$\text{équation 2} : 1\times(-6)+2\times 1+3\times 1 = -6+2+3 = -1 \checkmark$$
$$\text{équation 3} : (-2)\times(-6)+(-4)\times 1+(-6)\times 1 = 12-4-6 = 2 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{12}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant de 2 paramètres :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (-1-2\alpha-3\beta, \alpha, \beta) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour les paramètres fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 13

3 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{13} : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y + z = 4 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : z n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 3 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 trois fois la ligne L_1 (car $3-3\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&0&1\\3&6&1&4\\2&4&-3&-1\end{array}\right)\xrightarrow[O_3]{L_2-3L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&0&1&1\\2&4&-3&-1\end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3-3\times 1=0$; $6-3\times 2=0$; $1-3\times 0=1$; $4-3\times 1=1$.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&0&1\\0&0&1&1\\2&4&-3&-1\end{array}\right)\xrightarrow[O_3]{L_3-2L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&-3&-3\end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $4-2\times 2=0$; $-3-2\times 0=-3$; $-1-2\times 1=-3$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) vaut 0, de même que ceux des lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot** : la variable y sera une **variable libre**. On passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_2.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 3. Pour annuler le -3 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&0&\boxed{1}&1\\0&0&-3&-3\end{array}\right)\xrightarrow[O_3]{L_3+3L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3+3\times 1=0$; $-3+3\times 1=0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{13} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant du dernier pivot vers le premier, pour faire apparaître des **zéros au-dessus** de chaque pivot. Ici, tous les coefficients situés au-dessus des pivots sont déjà nuls : la forme échelonnée est déjà réduite, il n'y a rien à faire.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, z ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : y.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $y = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = -1$, $y = 1$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : 1 \times (-1) + 2 \times 1 = -1 + 2 = 1 \ \checkmark \\ &\text{équation 2} : 3 \times (-1) + 6 \times 1 + 1 \times 1 = -3 + 6 + 1 = 4 \ \checkmark \\ &\text{équation 3} : 2 \times (-1) + 4 \times 1 + (-3) \times 1 = -2 + 4 - 3 = -1 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{13}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (1 - 2\alpha, \alpha, 1) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 14

3 équations, 4 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{14} : \begin{cases} 2x - 4y - 6z - 4t = 4 \\ -2x + 3y + 3z + 4t = -7 \\ -2x + y - 4z + 7t = -15 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 4$ inconnues (x, y, z, t).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 & -4 \\ -2 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -15 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & -6 & -4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 4 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & 7 & -15 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -4 & -6 & -4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 4 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & 7 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & 4 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & 7 & -15 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-4) = -2$; $\frac{1}{2} \times (-6) = -3$; $\frac{1}{2} \times (-4) = -2$; $\frac{1}{2} \times 4 = 2$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -3 & -2 & 2 \\ (-2) & 3 & 3 & 4 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & 7 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -4 & 7 & -15 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $3+2\times(-2)=-1$; $3+2\times(-3)=-3$; $4+2\times(-2)=0$; $-7+2\times 2=-3$.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -3 \\ (-2) & 1 & -4 & 7 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -10 & 3 & -11 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $1+2\times(-2)=-3$; $-4+2\times(-3)=-10$; $7+2\times(-2)=3$; $-15+2\times 2=-11$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -10 & 3 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -10 & 3 & -11 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-3)=3$; $(-1)\times 0=0$; $(-1)\times(-3)=3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le -3 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 3 \\ 0 & (-3) & -10 & 3 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3+3\times 1=0$; $-10+3\times 3=-1$; $3+3\times 0=3$; $-11+3\times 3=-2$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par -1.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 3=-3$; $(-1)\times(-2)=2$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 2 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\operatorname{rang}(A|B)=3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\operatorname{rang}(A)=3$.

$$\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A|B)=3<m=4 \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{S}_{14} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 7. Pour annuler le 3 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 trois fois la ligne L_3 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 3L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $0 - 3 \times (-3) = 9$; $3 - 3 \times 2 = -3$.

Transformation 8. Pour annuler le -3 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 trois fois la ligne L_3 (car $-3 + 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + 3L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -11 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3 + 3 \times 1 = 0$; $-2 + 3 \times (-3) = -11$; $2 + 3 \times 2 = 8$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 9. Pour annuler le -2 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 deux fois la ligne L_2 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -11 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + 2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $0 + 2 \times 0 = 0$; $-11 + 2 \times 9 = 7$; $8 + 2 \times (-3) = 2$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 2 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + 7t = 2 \\ y + 9t = -3 \\ z - 3t = 2 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y, z ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : t.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $t = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = 2 - 7\alpha \\ y = -3 - 9\alpha \\ z = 2 + 3\alpha \\ t = \alpha \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = -5$, $y = -12$, $z = 5$, $t = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} \text{équation 1} &: 2 \times (-5) + (-4) \times (-12) + (-6) \times 5 + (-4) \times 1 \\ &= -10 + 48 - 30 - 4 = 4 \ \checkmark \\ \text{équation 2} &: (-2) \times (-5) + 3 \times (-12) + 3 \times 5 + 4 \times 1 \\ &= 10 - 36 + 15 + 4 = -7 \ \checkmark \\ \text{équation 3} &: (-2) \times (-5) + 1 \times (-12) + (-4) \times 5 + 7 \times 1 \\ &= 10 - 12 - 20 + 7 = -15 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{14}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (2 - 7\alpha, -3 - 9\alpha, 2 + 3\alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 15

3 équations, 4 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{15} : \begin{cases} x - 3y + 3z - t = 2 \\ 2x - 5y + 5z - 3t = 7 \\ -3x + 8y - 8z + 4t = -9 \end{cases}$$

Il comporte $n = 3$ équations et $m = 4$ inconnues (x, y, z, t).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 5 & -3 \\ -3 & 8 & -8 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & -3 & 7 \\ -3 & 8 & -8 & 4 & -9 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & 3 & -1 & 2 \\ \textcircled{2} & -5 & 5 & -3 & 7 \\ -3 & 8 & -8 & 4 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & 8 & -8 & 4 & -9 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-5 - 2 \times (-3) = 1$; $5 - 2 \times 3 = -1$; $-3 - 2 \times (-1) = -1$; $7 - 2 \times 2 = 3$.

Transformation 2. Pour annuler le -3 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ (-3) & 8 & -8 & 4 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3+3\times 1=0$; $8+3\times(-3)=-1$; $-8+3\times 3=1$; $4+3\times(-1)=1$; $-9+3\times 2=-3$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 3. Pour annuler le -1 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 3 \\ 0 & (-1) & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $1+1\times(-1)=0$; $1+1\times(-1)=0$; $-3+1\times 3=0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0=0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{15} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 4. Pour annuler le -3 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 trois fois la ligne L_2 (car $-3 + 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + 3L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3 + 3 \times 1 = 0$; $3 + 3 \times (-1) = 0$; $-1 + 3 \times (-1) = -4$; $2 + 3 \times 3 = 11$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - 4t = 11 \\ y - z - t = 3 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variables libres** (colonnes sans pivot) : z, t.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$, $t = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = 11 + 4\beta \\ y = 3 + \alpha + \beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$, $\beta = 1$: $x = 15$, $y = 5$, $z = 1$, $t = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} \text{équation 1} &: 1 \times 15 + (-3) \times 5 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 \\ &= 15 - 15 + 3 - 1 = 2 \ \checkmark \\ \text{équation 2} &: 2 \times 15 + (-5) \times 5 + 5 \times 1 + (-3) \times 1 \\ &= 30 - 25 + 5 - 3 = 7 \ \checkmark \\ \text{équation 3} &: (-3) \times 15 + 8 \times 5 + (-8) \times 1 + 4 \times 1 \\ &= -45 + 40 - 8 + 4 = -9 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{15}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant de 2 paramètres :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (11 + 4\beta, 3 + \alpha + \beta, \alpha, \beta) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour les paramètres fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 16

4 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{16} : \begin{cases} 3y - 5z = -2 \\ y - z = -2 \\ -x + 2y - 4z = -1 \\ -x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 ; x n'apparaît pas dans l'équation 2 : les coefficients correspondants valent 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_3, située plus bas, a un coefficient non nul (-1) dans cette colonne : on échange L_1 et L_3 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_3.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par -1.

Transformation 2. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 2=-2$; $(-1)\times(-4)=4$; $(-1)\times(-1)=1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 3. Pour annuler le -1 de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_1 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ \textcircled{-1} & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4+L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $1+1\times(-2)=-1$; $-3+1\times 4=1$; $1+1\times 1=2$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 3 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & \textcircled{3} & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $-5 - 3 \times (-1) = -2$; $-2 - 3 \times (-2) = 4$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 5. Pour annuler le -1 de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_2 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & \textcircled{-1} & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 + L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $1 + 1 \times (-1) = 0$; $2 + 1 \times (-2) = 0$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 4 = -2$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Le coefficient de L_4 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_4 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & 4 & & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & & -2 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{16} \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 7. Pour annuler le -1 de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_3 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & & 1 \\ 0 & 1 & \textcircled{-1} & & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & & -2 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & -4 \\ 0 & 0 & 1 & & -2 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $-2 + 1 \times (-2) = -4$.

Transformation 8. Pour annuler le 4 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 quatre fois la ligne L_3 (car $4 - 4 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & \textcircled{4} & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & & -2 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 4L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & & 9 \\ 0 & 1 & 0 & & -4 \\ 0 & 0 & 1 & & -2 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $4 - 4 \times 1 = 0$; $1 - 4 \times (-2) = 9$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 9. Pour annuler le -2 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 deux fois la ligne L_2 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1+2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $0+2\times 0=0$; $9+2\times(-4)=1$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0=0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \\ z=-2 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned}
&\text{équation 1} : 3\times(-4)+(-5)\times(-2) = -12+10 = -2 \checkmark\\
&\text{équation 2} : 1\times(-4)+(-1)\times(-2) = -4+2 = -2 \checkmark\\
&\text{équation 3} : (-1)\times 1+2\times(-4)+(-4)\times(-2) = -1-8+8 = -1 \checkmark\\
&\text{équation 4} : (-1)\times 1+1\times(-4)+(-3)\times(-2) = -1-4+6 = 1 \checkmark
\end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{16}$ admet une **solution unique** : $x = 1$, $y = -4$, $z = -2$, soit

$$\mathbb{S} = \{(1, -4, -2)\}.$$

Corrigé de l'exercice 17

4 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{17} : \begin{cases} -2x + 2y + 2z = -2 \\ -2x - 2y + 2z = -6 \\ 3x + 4y - 3z = 10 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 4 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & -3 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & -3 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & -3 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times 2=-1$; $-\frac{1}{2}\times 2=-1$; $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ \textcircled{-2} & -2 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & -3 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & -3 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $-2+2\times(-1)=-4$; $2+2\times(-1)=0$; $-6+2\times 1=-4$.

Transformation 3. Pour annuler le 3 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $3-3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ \textcircled{3} & 4 & -3 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3-3\times 1=0$; $4-3\times(-1)=7$; $-3-3\times(-1)=0$; $10-3\times 1=7$.

Transformation 4. Pour annuler le 1 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ (1) & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times (-1) = 1$; $-1 - 1 \times (-1) = 0$; $2 - 1 \times 1 = 1$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -4. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{4}$.

Transformation 5. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 0 & -4 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{4}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{4} \times (-4) = 1$; $-\frac{1}{4} \times 0 = 0$; $-\frac{1}{4} \times (-4) = 1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 6. Pour annuler le 7 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 sept fois la ligne L_2 (car $7 - 7 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & (7) & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 7L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $7 - 7 \times 1 = 0$; $0 - 7 \times 0 = 0$; $7 - 7 \times 1 = 0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 7. Pour annuler le 1 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $1 - 1 \times 1 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. Les lignes L_3, L_4 sont entièrement nulles, seconds membres compris : elles traduisent l'équation $0 = 0$, toujours vraie.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{17} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 8. Pour annuler le -1 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{-1} & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $-1 + 1 \times 0 = -1$; $1 + 1 \times 1 = 2$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; les lignes nulles, qui traduisent l'équation $0 = 0$, n'apportent aucune information et disparaissent :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : z.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned}
&\text{équation 1} : (-2)\times 3 + 2\times 1 + 2\times 1 = -6+2+2 = -2 \checkmark\\
&\text{équation 2} : (-2)\times 3 + (-2)\times 1 + 2\times 1 = -6-2+2 = -6 \checkmark\\
&\text{équation 3} : 3\times 3 + 4\times 1 + (-3)\times 1 = 9+4-3 = 10 \checkmark\\
&\text{équation 4} : 1\times 3 + (-1)\times 1 = 3-1 = 2 \checkmark
\end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{17}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (2+\alpha, 1, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Corrigé de l'exercice 18

4 équations, 3 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{18} : \begin{cases} 2x + 2y - 2z = -6 \\ 6x + 5y - 2z = -7 \\ 4x + 3y - 3z = -10 \\ 3y - 3z = -5 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 3$ inconnues (x, y, z).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 4 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 6 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & -6 \\ 6 & 5 & -2 & -7 \\ 4 & 3 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 2 & -2 & -6 \\ 6 & 5 & -2 & -7 \\ 4 & 3 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & 5 & -2 & -7 \\ 4 & 3 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times (-6) = -3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 6 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 six fois la ligne L_1 (car $6 - 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & -3 \\ \textcircled{6} & 5 & -2 & -7 \\ 4 & 3 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 6L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 11 \\ 4 & 3 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $6 - 6 \times 1 = 0$; $5 - 6 \times 1 = -1$; $-2 - 6 \times (-1) = 4$; $-7 - 6 \times (-3) = 11$.

Transformation 3. Pour annuler le 4 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 quatre fois la ligne L_1 (car $4 - 4 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 11 \\ \textcircled{4} & 3 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 4L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $4 - 4 \times 1 = 0$; $3 - 4 \times 1 = -1$; $-3 - 4 \times (-1) = 1$; $-10 - 4 \times (-3) = 2$.

Le coefficient de L_4 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 4 = -4$; $(-1) \times 11 = -11$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le -1 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -11 \\ 0 & \textcircled{-1} & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $1 + 1 \times (-4) = -3$; $2 + 1 \times (-11) = -9$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 6. Pour annuler le 3 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 trois fois la ligne L_2 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & \textcircled{3} & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & 28 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $-3 - 3 \times (-4) = 9$; $-5 - 3 \times (-11) = 28$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -3. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $-\frac{1}{3}$.

Transformation 7. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -9 \\ 0 & 0 & 9 & 28 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{3}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 28 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{3} \times (-3) = 1$; $-\frac{1}{3} \times (-9) = 3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 8. Pour annuler le 9 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 neuf fois la ligne L_3 (car $9 - 9 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{9} & 28 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 9L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $9 - 9 \times 1 = 0$; $28 - 9 \times 3 = 1$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, les lignes restantes ne contiennent plus que des zéros, mais leur second membre n'est pas nul : chacune traduit une **équation impossible**. On fait apparaître un pivot dans la colonne des constantes (et des zéros sous lui) pour lire correctement le rang de $A|B$. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

La colonne des constantes est traitée.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & -11 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 4, donc $\text{rang}(A|B) = 4$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = 3 \neq \text{rang}(A|B) = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{18} \text{ est incompatible.}$$

En effet, la ligne L_4 de $A_e|B_e$ est de la forme $(0 \cdots 0 \mid 1)$: elle traduit l'équation

$$0x + 0y + 0z = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 = 1,$$

ce qui est **impossible**. Aucune valeur des inconnues ne peut vérifier cette équation : il est donc inutile de poursuivre avec la remontée.

Le système $\mathcal{S}_{18}$ est incompatible :

$$\mathrm{S} = \emptyset.$$

Corrigé de l'exercice 19

4 équations, 4 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{19} : \begin{cases} -2x + 4y - 4z + 2t = 0 \\ x - y + 2z + t = -1 \\ -2x + 4y - 2z - 4t = 2 \\ -x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$$

Il comporte $n = 4$ équations et $m = 4$ inconnues (x, y, z, t).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : t n'apparaît pas dans l'équation 4 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ -1 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 7 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-2} & 4 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 7 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 7 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times 4=-2$; $-\frac{1}{2}\times(-4)=2$; $-\frac{1}{2}\times 2=-1$; $-\frac{1}{2}\times 0=0$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 2 & -1 & 0 \\ \textcircled{1} & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 7 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 7 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $-1-1\times(-2)=1$; $2-1\times 2=0$; $1-1\times(-1)=2$; $-1-1\times 0=-1$.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ \textcircled{-2} & 4 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 7 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ -1 & 7 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $4+2\times(-2)=0$; $-2+2\times 2=2$; $-4+2\times(-1)=-6$; $2+2\times 0=2$.

Transformation 4. Pour annuler le -1 de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_1 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ \textcircled{-1} & 7 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4+L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $7+1\times(-2)=5$; $2+1\times 2=4$; $0+1\times(-1)=-1$; $0+1\times 0=0$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 5. Pour annuler le 5 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 cinq fois la ligne L_2 (car $5-5\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & \textcircled{5} & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4-5L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -11 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $5-5\times 1=0$; $4-5\times 0=4$; $-1-5\times 2=-11$; $0-5\times(-1)=5$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -11 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -11 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2=1$; $\frac{1}{2}\times(-6)=-3$; $\frac{1}{2}\times 2=1$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 7. Pour annuler le 4 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 quatre fois la ligne L_3 (car $4 - 4 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{4} & -11 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 4L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $4 - 4 \times 1 = 0$; $-11 - 4 \times (-3) = 1$; $5 - 4 \times 1 = 1$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 4. On cherche le pivot sur la ligne L_4. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne 4 (coefficients de t) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 4, donc $\text{rang}(A|B) = 4$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 4, donc $\text{rang}(A) = 4$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 4 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{19} \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_4, colonne 4. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 8. Pour annuler le -3 de L_3 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_3 trois fois la ligne L_4 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+3L_4} \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3+3\times 1=0$; $1+3\times 1=4$.

Transformation 9. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_4 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2-2L_4} \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $-1-2\times 1=-3$.

Transformation 10. Pour annuler le -1 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 une fois la ligne L_4 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1+L_4} \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $0+1\times 1=1$.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 11. Pour annuler le 2 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 deux fois la ligne L_3 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1-2L_3} \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -7\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $0-2\times 0=0$; $1-2\times 4=-7$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 12. Pour annuler le -2 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 deux fois la ligne L_2 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1+2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $0+2\times 0=0$; $0+2\times 0=0$; $-7+2\times(-3)=-13$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x=-13 \\ y=-3 \\ z=4 \\ t=1 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 6 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned}
&\text{équation 1} : (-2)\times(-13)+4\times(-3)+(-4)\times 4+2\times 1\\
&\qquad = 26-12-16+2=0\ \checkmark\\
&\text{équation 2} : 1\times(-13)+(-1)\times(-3)+2\times 4+1\times 1\\
&\qquad = -13+3+8+1=-1\ \checkmark\\
&\text{équation 3} : (-2)\times(-13)+4\times(-3)+(-2)\times 4+(-4)\times 1\\
&\qquad = 26-12-8-4=2\ \checkmark\\
&\text{équation 4} : (-1)\times(-13)+7\times(-3)+2\times 4=13-21+8=0\ \checkmark
\end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{19}$ admet une **solution unique** : $x=-13$, $y=-3$, $z=4$, $t=1$, soit

$$\mathbb{S}=\{(-13,-3,4,1)\}.$$

Corrigé de l'exercice 20

4 équations, 4 inconnues

Rappelons le système à résoudre :

$$\mathcal{S}_{20}:\begin{cases} -x & & +2z- & t=-3\\ -2x & & +5z- & 2t=-3\\ 2x+2y- & 4z+ & 4t= & 10\\ 3x+6y- & 5z+ & 9t= & 24 \end{cases}$$

Il comporte $n=4$ équations et $m=4$ inconnues (x,y,z,t).

Étape 1 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 1 ; y n'apparaît pas dans l'équation 2 : les coefficients correspondants valent 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & -5 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & -5 & 9 & 24 \end{array}\right)$$

Étape 2 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par -1.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 0 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & -5 & 9 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & -5 & 9 & 24 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 0 = 0$; $(-1) \times 2 = -2$; $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times (-3) = 3$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 & 3 \\ \textcircled{-2} & 0 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & -5 & 9 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & -5 & 9 & 24 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $0+2\times 0=0$; $5+2\times(-2)=1$; $-2+2\times 1=0$; $-3+2\times 3=3$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \textcircled{2} & 2 & -4 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & -5 & 9 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 & 9 & 24 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2-2\times 1=0$; $2-2\times 0=2$; $-4-2\times(-2)=0$; $4-2\times 1=2$; $10-2\times 3=4$.

Transformation 4. Pour annuler le 3 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 trois fois la ligne L_1 (car $3-3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ \textcircled{3} & 6 & -5 & 9 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4-3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 15 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3-3\times 1=0$; $6-3\times 0=6$; $-5-3\times(-2)=1$; $9-3\times 1=6$; $24-3\times 3=15$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. Le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_3, située plus bas, a un coefficient non nul (2) dans cette colonne : on échange L_2 et L_3 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 5. Permutation des lignes L_2 et L_3.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 15 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 15 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 0 = 0$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 4 = 2$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 7. Pour annuler le 6 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 six fois la ligne L_2 (car $6 - 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{6} & 1 & 6 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 6L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $6 - 6 \times 1 = 0$; $1 - 6 \times 0 = 1$; $6 - 6 \times 1 = 0$; $15 - 6 \times 2 = 3$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 8. Pour annuler le 1 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $3 - 1 \times 3 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_4 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 3 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 < m = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{20} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 4 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 9. Pour annuler le -2 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 deux fois la ligne L_3 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \textcircled{-2} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + 2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $1 + 2 \times 0 = 1$; $3 + 2 \times 3 = 9$.

Pivot de L_2, colonne 2. Au-dessus de ce pivot, les coefficients sont déjà nuls : rien à faire.

Le coefficient de L_1 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 5 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + t = 9 \\ y + t = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y, z ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : t.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $t = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = 9 - \alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 3 \\ t = \alpha \end{cases}$$

Étape 6 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = 8$, $y = 1$, $z = 3$, $t = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned}
&\text{équation 1} : (-1)\times 8 + 2\times 3 + (-1)\times 1 = -8 + 6 - 1 = -3 \checkmark \\
&\text{équation 2} : (-2)\times 8 + 5\times 3 + (-2)\times 1 = -16 + 15 - 2 = -3 \checkmark \\
&\text{équation 3} : 2\times 8 + 2\times 1 + (-4)\times 3 + 4\times 1 \\
&\qquad\qquad = 16 + 2 - 12 + 4 = 10 \checkmark \\
&\text{équation 4} : 3\times 8 + 6\times 1 + (-5)\times 3 + 9\times 1 \\
&\qquad\qquad = 24 + 6 - 15 + 9 = 24 \checkmark
\end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{20}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \left\{ (9-\alpha, 2-\alpha, 3, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Bilan de la série

Les vingt exercices couvrent tous les cas : solution unique, infinité de solutions (avec un ou deux paramètres) et absence de solution, pour des systèmes carrés comme rectangulaires.

Ce qu'il faut retenir

— Gauss-Jordan, c'est une **descente** (Gauss : pivots ramenés à 1, zéros au-dessous) suivie d'une **remontée** (Jordan : zéros au-dessus, du dernier pivot au premier).

— La forme échelonnée $A_e|B_e$ donne les **rangs**, donc la nature du système ; la forme échelonnée réduite $A_r|B_r$ donne les **solutions**.

— Solution unique : à gauche de la barre, on reconnaît la matrice identité ; chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

— Infinité de solutions : les colonnes sans pivot donnent les variables libres (paramètres) ; chaque ligne non nulle exprime une variable principale.

— Aucune solution : une ligne $(0 \ \cdots \ 0 \mid d)$ avec $d \neq 0$ traduit l'équation impossible $0 = d$.

— Aucune substitution n'est nécessaire : les solutions se lisent sur le système issu de $A_r|B_r$.

Récapitulatif des résultats

Ex.	n	m	rang(A)	rang$(A\|B)$	Nature	Solutions
1	3	3	3	3	compatible déterminé	$\{(0,3,1)\}$
2	3	3	3	3	compatible déterminé	$\{(1,1,3)\}$
3	3	3	2	2	compatible indéterminé	1 paramètre
4	3	3	2	3	incompatible	$\mathbb{S} = \emptyset$
5	2	2	2	2	compatible déterminé	$\{(-2,2)\}$
6	2	2	2	2	compatible déterminé	$\{(-1,0)\}$
7	2	2	1	2	incompatible	$\mathbb{S} = \emptyset$
8	2	3	2	2	compatible indéterminé	1 paramètre
9	3	2	2	2	compatible déterminé	$\{(5,-2)\}$
10	3	2	2	3	incompatible	$\mathbb{S} = \emptyset$
11	3	3	3	3	compatible déterminé	$\{(1,5,2)\}$
12	3	3	1	1	compatible indéterminé	2 paramètres
13	3	3	2	2	compatible indéterminé	1 paramètre
14	3	4	3	3	compatible indéterminé	1 paramètre
15	3	4	2	2	compatible indéterminé	2 paramètres
16	4	3	3	3	compatible déterminé	$\{(1,-4,-2)\}$
17	4	3	2	2	compatible indéterminé	1 paramètre
18	4	3	3	4	incompatible	$\mathbb{S} = \emptyset$
19	4	4	4	4	compatible déterminé	$\{(-13,-3,4,1)\}$
20	4	4	3	3	compatible indéterminé	1 paramètre

Partie 3 : Quand les calculs se compliquent, MATLAB

▶ Les limites du calcul à la main

Pour échelonner à la main une matrice de n lignes et n colonnes, il faut de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$ multiplications : environ 9 pour $n = 3$, 333 pour $n = 10$ et plus de 2 600 pour $n = 20$. Chacune peut être source d'erreur.

Pourquoi passer par un logiciel ?

— **Le calcul devient fastidieux** : le nombre d'opérations élémentaires augmente très vite avec la taille de la matrice.

— **Le risque d'erreur devient trop élevé** : une seule erreur de calcul se propage à toutes les transformations suivantes et fausse la forme échelonnée réduite, donc les solutions.

— **En gestion, les matrices sont grandes** : des dizaines de produits, de contraintes ou de centres d'analyse.

Dès que les choses commencent à se compliquer, il faut donc passer par un logiciel de calcul comme **MATLAB** (ou ses équivalents gratuits Octave et Python). Le rôle de l'étudiant reste essentiel : savoir **ce que l'on calcule** et **interpréter le résultat**.

▶ L'algorithme de Gauss-Jordan avec MATLAB

La fonction `rref` (*reduced row echelon form*) effectue en une seule instruction toute la descente et toute la remontée : elle renvoie la forme échelonnée réduite $A_r|B_r$ de la matrice augmentée `[A B]`. Il ne reste plus qu'à la réécrire sous forme de système.

Script MATLAB : trois systèmes de la série

```
% Exercice 1 : une solution unique
A1 = [-1 -1 3; -1 -2 6; -1 0 -2];
B1 = [0; 0; -2];
R1 = rref([A1 B1])

% Exercice 3 : une infinité de solutions
A3 = [-2 2 0; 2 -4 -2; -2 6 4];
B3 = [-12; 6; 0];
R3 = rref([A3 B3])

% Exercice 4 : aucune solution
A4 = [1 3 -3; -1 -5 -3; 1 4 0];
B4 = [3; 5; 0];
R4 = rref([A4 B4])
```

Résultat affiché par MATLAB

```
R1 =
     1     0     0     0
     0     1     0     3
     0     0     1     1
```

```
R3 =
     1     0     1     9
     0     1     1     3
     0     0     0     0

R4 =
     1     0   -12     0
     0     1     3     0
     0     0     0     1
```

Comment lire ce résultat

— On retrouve les formes échelonnées réduites $A_r|B_r$ des exercices 1 et 3. Pour l'exercice 4, la descente suffisait à conclure ; MATLAB poursuit jusqu'à la forme réduite, mais la conclusion est la même.

— `R1` : la partie gauche est la matrice identité ; la dernière colonne donne directement la solution unique.

— `R3` : une ligne entièrement nulle et une colonne sans pivot : une infinité de solutions, que l'on exprime avec un paramètre en réécrivant le système.

— `R4` : une ligne de la forme $(0\ 0\ 0 \mid 1)$ traduit l'équation impossible $0 = 1$: aucune solution.