Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

SÉRIE D'EXERCICES CORRIGÉS

SÉRIE 10

Applications des mathématiques à la gestion d'entreprise

Modélisation, résolution et interprétation managériale

OBJECTIF

Traduire un problème de gestion en système linéaire, le résoudre par Gauss-Jordan et formuler une recommandation au dirigeant ; découvrir la résolution avec MATLAB.

20 problèmes de gestion · Corrigés détaillés pas à pas · Initiation à MATLAB

AU SOMMAIRE

Partie 1 **Énoncés** rappels du cours et 20 problèmes de gestion d'entreprise

Partie 2 **Corrigés détaillés** modélisation, résolution et interprétation

Bilan **Ce qu'il faut retenir** et récapitulatif des résultats

Partie 3 **MATLAB** quand les calculs se compliquent

MODULE	PROFESSEUR	ANNÉE UNIVERSITAIRE
Mathématiques pour la gestion	**Jaouad Madkour**	**2026–2027**

Partie 1 : Énoncés

► Rappels du cours

Les chapitres 1 et 2 ont fourni les outils : le calcul matriciel, puis la résolution des systèmes linéaires. Ce chapitre 3 les met au service de l'objectif du cours : traduire un problème de gestion en système linéaire, le résoudre et interpréter la solution.

Les vingt problèmes de cette série sont issus de situations concrètes de gestion d'entreprise : production, comptabilité de gestion, finance, marketing, logistique et ressources humaines. Chacun se ramène à un système linéaire que l'on résout par l'algorithme de Gauss-Jordan.

Démarche à suivre pour chaque problème

1. **Modélisation managériale** : identifier les inconnues (avec leurs unités), traduire chaque contrainte de gestion en équation linéaire et poser le système $\mathcal{S}$.
2. **Forme matricielle** : écrire $AX = B$, puis former la matrice augmentée $A|B$.
3. **Descente (Gauss)** : réduire $A|B$ à sa forme échelonnée, notée $A_e|B_e$ (l'indice e signifie « échelonnée »).
4. **Nature du système** : lire $\text{rang}(A)$ et $\text{rang}(A|B)$ sur $A_e|B_e$ et conclure avec le théorème de Rouché-Fontené.
5. **Remontée (Jordan)** : en partant du dernier pivot, annuler les éléments situés au-dessus des pivots, jusqu'à la forme échelonnée réduite, notée $A_r|B_r$ (l'indice r signifie « réduite »).
6. **Retour au système** : réécrire $A_r|B_r$ sous forme de système et lire directement les solutions.
7. **Vérification** : remplacer la solution trouvée (ou une solution particulière) dans chaque équation du système de départ.
8. **Interprétation managériale** : traduire la solution en recommandation pour le dirigeant, en vérifiant qu'elle a un sens économique (quantités positives, faisabilité).

Si le système est incompatible, la remontée et le retour au système sont inutiles : on passe directement à l'interprétation, qui devient alors l'étape 5.

△ ! Précaution essentielle : le même ordre des inconnues partout

Avant d'écrire la matrice des coefficients A, il faut que **les inconnues apparaissent dans le même ordre dans toutes les équations** (x, puis y, puis z, puis t). Sinon, les coefficients sont rangés dans les mauvaises colonnes : la matrice A est **fausse**, et tous les résultats qui suivent (rangs, nature du système, solutions) le sont aussi.

1. Réécrire chaque équation en plaçant les inconnues dans l'ordre x, y, z, t.
2. Lorsqu'une inconnue n'apparaît pas dans une équation, son coefficient est 0 : on écrit ce 0 dans la matrice.
3. Le vecteur X accueille les inconnues **dans ce même ordre** : la première colonne de A correspond à la première inconnue de X, la deuxième colonne à la deuxième inconnue, etc.

Exemple.

$$\underbrace{\begin{cases} 2y + x = 5 \\ x - z = 1 \\ 3z + y - x = 2 \end{cases}}_{\text{inconnues dans le désordre}} \Longrightarrow \underbrace{\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - z = 1 \\ -x + y + 3z = 2 \end{cases}}_{\text{inconnues remises dans l'ordre}}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Erreur fréquente : recopier la première équation telle qu'elle est écrite donnerait la ligne $(2 \ 1 \ 0)$, qui correspond à $2x + y$: c'est un autre système !

Gauss-Jordan et Rouché-Fontené en bref

Descente (Gauss) : pour chaque colonne, de gauche à droite, on choisit un pivot non nul (permutation O_1 s'il est nul), on le ramène à 1 (O_2), puis on annule les coefficients situés au-dessous (O_3). On obtient $A_e|B_e$, qui donne les rangs.

Remontée (Jordan) : du dernier pivot au premier, on annule les coefficients situés au-dessus de chaque pivot (O_3). On obtient $A_r|B_r$, qui donne les solutions.

Rouché-Fontené, à appliquer sur $A_e|B_e$, juste après la descente :

$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|B) \Longrightarrow$ **incompatible** : cahier des charges irréalisable

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = m \Longrightarrow$ **compatible déterminé** : une seule décision possible

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) < m \Longrightarrow$ **compatible indéterminé** : marge de manœuvre

Consigne commune

Pour chacun des problèmes suivants, appliquer les étapes de la démarche. Effectuer **une seule opération élémentaire à la fois** lors de la descente et de la remontée, puis formuler une recommandation claire à l'attention du dirigeant.

▶ Les problèmes

Exercice 1 : Planification de la production d'une menuiserie

Domaine : Gestion de production corrigé p. 9 →

La menuiserie **Atlas Bois** (Tanger) fabrique des tables, des chaises et des armoires. Chaque meuble passe successivement par trois ateliers. Le tableau ci-dessous indique le nombre d'heures nécessaires par unité et la capacité hebdomadaire de chaque atelier.

	Table	Chaise	Armoire	Capacité (heures/semaine)
Découpe	2	1	3	110
Assemblage	3	2	4	180
Finition	1	1	2	80

Le directeur de production souhaite utiliser **entièrement** la capacité des trois ateliers. Combien de tables, de chaises et d'armoires doit-il programmer chaque semaine ?

Exercice 2 : Formulation d'un cocktail de jus de fruits

Domaine : Production agroalimentaire (mélange) corrigé p. 14 →

La société **Souss Délices** (Agadir) prépare un cocktail de fruits par lots de 100 litres, en mélangeant trois jus purs : orange, pomme et mangue.

	Orange	Pomme	Mangue
Coût d'achat (MAD par litre)	6	4	10
Teneur en sucre naturel	9 %	11 %	14 %

Le service qualité impose une teneur en sucre de 10,6 % dans le cocktail (soit 10,6 litres de sucre pour 100 litres), et le contrôleur de gestion fixe le coût matière d'un lot à 620 MAD. Quelle quantité de chaque jus faut-il utiliser par lot ?

Exercice 3 : Répartition secondaire avec prestations réciproques

Domaine : Comptabilité de gestion corrigé p. 19 →

L'entreprise **Textiles du Détroit** (Tétouan) dispose de trois centres auxiliaires : Entretien, Énergie et Administration. Après la répartition primaire, leurs charges s'élèvent à 114, 80 et 30 milliers de MAD. Ces centres se rendent des services entre eux :

— le centre Entretien reçoit 20 % du total du centre Énergie et 20 % du total du centre Administration ;

— le centre Énergie reçoit 25 % du total du centre Administration ;

— le centre Administration reçoit 20 % du total du centre Entretien et 20 % du total du centre Énergie.

Le reste des prestations est destiné aux centres principaux. Déterminer le **coût total** de chaque centre auxiliaire après prise en compte des prestations réciproques.

Exercice 4 : Allocation d'un budget publicitaire

Domaine : Marketing corrigé p. 24 →

La chaîne **Café Nour** (Casablanca) consacre un budget de 300 milliers de MAD au lancement d'une nouvelle gamme. Trois canaux sont retenus : le digital, la télévision et l'affichage. Selon

l'agence média, chaque millier de MAD investi rapporte respectivement 8, 5 et 3 milliers de contacts. L'objectif est d'atteindre exactement 1,8 million de contacts (1 800 milliers). Pour des raisons d'image, la direction exige que le budget télévision soit égal à la somme des budgets digital et affichage. Comment répartir le budget ?

Exercice 5 : Structuration d'un financement par emprunts

Domaine : Finance d'entreprise corrigé p. 29 →

La société **Riad Logistique** (Marrakech) doit financer un nouvel entrepôt d'un montant de 2 000 milliers de MAD. Elle dispose de trois sources : un emprunt auprès de la banque A au taux annuel de 4 %, un emprunt auprès de la banque B à 5 %, et un contrat de crédit-bail dont le coût annuel est de 8 %. Le directeur financier souhaite que la charge d'intérêts de la première année soit de 105 milliers de MAD et que le montant emprunté auprès de la banque A soit le double du montant financé par crédit-bail. Quel montant doit-il mobiliser auprès de chaque source ?

Exercice 6 : Optimisation du chargement d'un camion

Domaine : Logistique corrigé p. 34 →

Le transporteur **TransNord** (Tanger Med) charge un camion avec trois types de colis.

	Type A	Type B	Type C
Poids (kg par colis)	20	15	30
Volume (m^3 par colis)	0,2	0,1	0,3

Les colis de types B et C sont fragiles et doivent être placés dans un compartiment protégé qui en contient exactement 60. Pour rentabiliser le trajet, le camion doit être chargé à pleine capacité : 2 000 kg de charge utile et 18 m^3 de volume. Combien de colis de chaque type faut-il charger ?

Exercice 7 : Calcul du coût des unités d'œuvre

Domaine : Contrôle de gestion corrigé p. 39 →

La biscuiterie **Atlas Gourmet** (Fès) veut connaître le coût de ses trois unités d'œuvre : l'heure-machine, l'heure de main-d'œuvre et le sac de matière première. Le contrôleur de gestion dispose des données de trois ordres de fabrication récents :

	Heures-machine	Heures de MO	Sacs de matière	Coût total (MAD)
Ordre A	10	5	2	900
Ordre B	4	10	3	1 060
Ordre C	6	2	5	860

Déterminer le coût de chaque unité d'œuvre.

Exercice 8 : Seuil de rentabilité multi-produits

Domaine : Contrôle de gestion corrigé p. 44 →

L'entreprise **Électro-Maroc** (Kénitra) assemble trois appareils A, B et C, dont les marges sur coût variable unitaires sont respectivement de 20, 30 et 50 MAD. Ses charges fixes annuelles s'élèvent à 170 000 MAD. Le service commercial observe une composition des ventes stable :

on vend deux fois plus d'appareils B que d'appareils C, et trois fois plus d'appareils A que d'appareils C. Quelles quantités de chaque appareil faut-il vendre pour atteindre exactement le **seuil de rentabilité** (marge sur coût variable totale égale aux charges fixes) ?

Exercice 9 : Placement d'un excédent de trésorerie

Domaine : Trésorerie

corrigé p. 49 →

La société **Maghreb Distribution** (Rabat) dispose d'un excédent de trésorerie de 1 000 milliers de MAD qu'elle souhaite placer sur un an, entre trois supports : un dépôt à terme (rendement 3 %, risque noté 1), des bons du Trésor (4 %, risque 2) et des OPCVM (5 %, risque 3). Le trésorier vise un revenu de 41 milliers de MAD et un indice de risque moyen pondéré de 2,1 (soit $1x + 2y + 3z = 2{,}1 \times 1\,000 = 2\,100$). Quelles répartitions sont possibles ?

Exercice 10 : Cahier des charges d'un engrais composé

Domaine : Production chimique (mélange)

corrigé p. 54 →

Le fabricant d'engrais **Phospha-Sud** (Safi) dispose de trois engrais de base, dont les teneurs en azote (N), phosphore (P) et potassium (K) sont les suivantes :

	Engrais A	Engrais B	Engrais C
Azote (N)	20 %	10 %	15 %
Potassium (K)	10 %	10 %	10 %

Un client agricole commande 100 tonnes d'un mélange contenant exactement 15 % d'azote et 12 % de potassium. Le responsable de production peut-il honorer cette commande ?

Exercice 11 : Programme de production dans la confection

Domaine : Gestion de production

corrigé p. 57 →

L'atelier de confection **Tissage du Nord** (Tétouan) fabrique des chemises, des pantalons, des vestes et des robes. Les temps de fabrication (en heures par article) et les capacités journalières sont donnés ci-dessous.

	Chemise	Pantalon	Veste	Robe	Capacité (heures/jour)
Coupe	1	1	2	1	50
Couture	2	3	4	3	120
Finition	1	1	3	2	65

La direction souhaite saturer les trois ateliers. Quels programmes journaliers de production sont possibles ?

Exercice 12 : Plan média sur quatre canaux

Domaine : Marketing

corrigé p. 62 →

Le groupe **Argania Cosmetics** (Essaouira) dispose de 500 milliers de MAD pour une campagne nationale, à répartir entre le digital, la télévision, l'affichage et la presse. Chaque millier de MAD rapporte respectivement 10, 6, 4 et 2 milliers de contacts, et l'objectif est de 3 400 milliers de contacts. La directrice marketing souhaite que le budget digital soit égal à la somme des budgets télévision et presse. Quels plans média sont envisageables ?

Exercice 13 : Allocation d'un budget d'investissement

Domaine : Finance d'entreprise corrigé p. 68 →

La holding **Souss Invest** (Agadir) dispose de 5 000 milliers de MAD à investir dans quatre projets de rentabilités annuelles attendues 6 %, 8 %, 10 % et 12 %. Les projets 1 et 2 sont jugés sûrs, les projets 3 et 4 risqués. Le conseil d'administration exige un revenu annuel de 395 milliers de MAD et, par prudence, que les montants investis dans les projets sûrs représentent trois fois les montants investis dans les projets risqués. Quelles allocations respectent ces exigences ?

Exercice 14 : Planification des tournées de livraison

Domaine : Logistique corrigé p. 74 →

La société **Atlas Express** (Casablanca) organise ses livraisons hebdomadaires avec trois types de camions :

	Petit	Moyen	Gros
Capacité (tonnes par tournée)	2	5	10
Coût (centaines de MAD par tournée)	8	15	25

Cette semaine, 14 tournées longues distances doivent être assurées par des camions moyens ou gros, il faut effectuer 30 tournées au total pour livrer 132 tonnes, et le budget transport est de 398 centaines de MAD. Combien de tournées chaque type de camion doit-il effectuer ?

Exercice 15 : Mix-produits et politique tarifaire

Domaine : Gestion commerciale corrigé p. 80 →

La manufacture **Dar Zellige** (Fès) vend trois gammes de carreaux : standard (50 MAD le m^2), premium (80 MAD) et luxe (120 MAD). Les marges sur coût variable sont de 20, 30 et 50 MAD par m^2. Pour le prochain trimestre, le directeur commercial fixe les objectifs suivants : vendre 1 000 m^2, réaliser un chiffre d'affaires de 73 000 MAD, dégager une marge sur coût variable de 29 000 MAD, et faire en sorte que la gamme luxe représente 20 % des surfaces vendues. Quelles surfaces faut-il vendre dans chaque gamme ?

Exercice 16 : Constitution d'un stock dans un entrepôt

Domaine : Gestion des stocks corrigé p. 86 →

Le grossiste **Pharma Distrib** (Meknès) doit constituer un stock de trois catégories de produits conditionnés en palettes :

	Catégorie A	Catégorie B	Catégorie C
Valeur (milliers de MAD par palette)	2	3	5
Surface au sol (m^2 par palette)	1	1,5	2
Poids (tonnes par palette)	0,5	0,8	1,2

Le cahier des charges prévoit 100 palettes, une valeur de stock de 290 milliers de MAD, une surface occupée de 135 m^2, et un poids total de 80 tonnes (contrat de transport forfaitaire). Ce cahier des charges est-il réalisable ?

Exercice 17 : Répartition secondaire entre quatre centres auxiliaires

Domaine : Comptabilité de gestion corrigé p. 91 →

La **Conserverie Atlantique** (Safi) dispose de quatre centres auxiliaires : Entretien, Énergie, Administration et Transport. Leurs charges primaires sont respectivement de 66, 51, 69 et 38 milliers de MAD. Les prestations réciproques sont les suivantes :

— l'Entretien reçoit 20 % de l'Administration et 20 % du Transport ;

— l'Énergie reçoit 20 % de l'Administration et 10 % du Transport ;

— l'Administration reçoit 30 % de l'Entretien, 20 % de l'Énergie et 10 % du Transport ;

— le Transport reçoit 10 % de l'Administration.

Calculer le coût total de chaque centre auxiliaire.

Exercice 18 : Programme de production d'une laiterie

Domaine : Production agroalimentaire corrigé p. 98 →

La **Laiterie Al Baraka** (Meknès) fabrique quatre produits par lots : yaourts, lben, fromage frais et beurre. Chaque lot consomme les ressources suivantes :

	Yaourt	Lben	Fromage	Beurre	Disponible
Pasteurisation haute température (h)	0	2	1	3	70
Main-d'œuvre (h)	1	2	1	2	75
Lait (centaines de litres)	2	1	3	1	90
Chambre froide (palettes)	1	1	1	1	50

Les yaourts n'utilisent pas la pasteurisation haute température. Le responsable de production veut utiliser la totalité des ressources disponibles. Combien de lots de chaque produit doit-il prévoir ?

Exercice 19 : Planification des effectifs d'une nouvelle usine

Domaine : Ressources humaines corrigé p. 105 →

Le groupe **Nador Industries** ouvre une nouvelle usine et doit recruter des ouvriers, des techniciens, des ingénieurs et des cadres, dont les salaires mensuels chargés sont respectivement de 4, 6, 12 et 15 milliers de MAD. La DRH dispose d'une masse salariale mensuelle de 630 milliers de MAD. L'organisation prévoit deux techniciens par ingénieur et un cadre pour neuf autres salariés, et l'effectif total doit être de 100 personnes. Combien de personnes faut-il recruter dans chaque catégorie ?

Exercice 20 : Composition d'un fil textile

Domaine : Production textile (mélange) corrigé p. 113 →

La **Filature Al Andalous** (Fès) produit un fil en mélangeant quatre fibres : coton (30 MAD/kg), polyester (20 MAD/kg), lin (50 MAD/kg) et laine (80 MAD/kg). Pour un lot de 100 kg, le cahier des charges impose un coût matière de 3 600 MAD et 70 kg de fibres naturelles (coton, lin et laine). Le service achats ajoute une contrainte : le surcoût des fibres naturelles par rapport au polyester (soit 10, 30 et 60 MAD par kg de coton, de lin et de laine) doit être de 1 600 MAD. Quelles compositions du lot sont possibles ?

Partie 2 : Corrigés détaillés

Conventions de lecture

— Les lignes de chaque matrice sont notées $L_1, L_2, L_3, \ldots$ selon leur position dans la matrice *actuelle* : après chaque étape, la numérotation repart de L_1.

— Au-dessus de chaque flèche figure la transformation effectuée ; en dessous, le code de l'opération élémentaire (O_1, O_2 ou O_3).

— Chaque opération porte sur **toute la ligne**, second membre compris ; la nouvelle ligne est calculée **coefficient par coefficient**. Les nombres décimaux sont écrits avec une virgule (0,2).

$\boxed{2}$ pivot en cours d'utilisation (encadré en bleu)

$\textcircled{-3}$ nombre à annuler, au-dessous ou au-dessus du pivot (entouré en orange)

1 pivot des formes échelonnée $A_e|B_e$ et échelonnée réduite $A_r|B_r$ (en rouge)

Corrigé de l'exercice 1 : Planification de la production d'une menuiserie

Gestion de production

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = nombre de tables fabriquées par semaine ;

— y = nombre de chaises fabriquées par semaine ;

— z = nombre d'armoires fabriquées par semaine ;

Traduction des contraintes.

— Atelier de découpe (110 heures disponibles) : $2x + y + 3z = 110$

— Atelier d'assemblage (180 heures disponibles) : $3x + 2y + 4z = 180$

— Atelier de finition (80 heures disponibles) : $x + y + 2z = 80$

On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x + y + 3z = 110 \\ 3x + 2y + 4z = 180 \\ x + y + 2z = 80 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 110 \\ 180 \\ 80 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 110 \\ 3 & 2 & 4 & 180 \\ 1 & 1 & 2 & 80 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 3 & 110 \\ 3 & 2 & 4 & 180 \\ 1 & 1 & 2 & 80 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 3 & 2 & 4 & 180 \\ 1 & 1 & 2 & 80 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 1 = 0{,}5$; $\frac{1}{2} \times 3 = 1{,}5$; $\frac{1}{2} \times 110 = 55$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 3 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ \textcircled{3} & 2 & 4 & 180 \\ 1 & 1 & 2 & 80 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 & 15 \\ 1 & 1 & 2 & 80 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $2 - 3 \times 0{,}5 = 0{,}5$; $4 - 3 \times 1{,}5 = -0{,}5$; $180 - 3 \times 55 = 15$.

Transformation 3. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 & 15 \\ \textcircled{1} & 1 & 2 & 80 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 & 15 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 25 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$; $2 - 1 \times 1{,}5 = 0{,}5$; $80 - 1 \times 55 = 25$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 0,5. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{0{,}5}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{0{,}5}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 0 & \boxed{0{,}5} & -0{,}5 & 15 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 25 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{0{,}5} L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 0 & 1 & -1 & 30 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 25 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{0{,}5} \times 0{,}5 = 1$; $\frac{1}{0{,}5} \times (-0{,}5) = -1$; $\frac{1}{0{,}5} \times 15 = 30$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le 0,5 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_2 multipliée par 0,5 (car $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 30 \\ 0 & \textcircled{0{,}5} & 0{,}5 & 25 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 0{,}5 L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 0 & 1 & -1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$; $0{,}5 - 0{,}5 \times (-1) = 1$; $25 - 0{,}5 \times 30 = 10$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 30 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 10 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_1 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 6. Pour annuler le -1 de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_3 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 0 & 1 & -1 & 30 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $30 + 1 \times 10 = 40$.

Transformation 7. Pour annuler le 1,5 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 la ligne L_3 multipliée par 1,5 (car $1{,}5 - 1{,}5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 1{,}5L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1{,}5 - 1{,}5 \times 1 = 0$; $55 - 1{,}5 \times 10 = 40$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 8. Pour annuler le 0,5 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 la ligne L_2 multipliée par 0,5 (car $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 0{,}5L_2} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$; $0 - 0{,}5 \times 0 = 0$; $40 - 0{,}5 \times 40 = 20$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 20 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 40 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 10 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 20 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 40 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 10 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 40 \\ z = 10 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1} : 2 \times 20 + 1 \times 40 + 3 \times 10 = 40 + 40 + 30 = 110 \checkmark$$
$$\text{équation 2} : 3 \times 20 + 2 \times 40 + 4 \times 10 = 60 + 80 + 40 = 180 \checkmark$$
$$\text{équation 3} : 1 \times 20 + 1 \times 40 + 2 \times 10 = 20 + 40 + 20 = 80 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_1$ admet une **solution unique** : $x = 20$, $y = 40$, $z = 10$, soit

$$\mathbb{S} = \{(20, 40, 10)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

Les trois quantités sont positives et entières : le programme est réalisable. La menuiserie doit fabriquer chaque semaine **20 tables, 40 chaises et 10 armoires**. Avec ce programme, les trois ateliers sont utilisés à 100 % : aucune heure n'est perdue. C'est la seule combinaison possible ; toute autre répartition laisserait des heures inutilisées dans au moins un atelier, ou dépasserait la capacité d'un autre.

Corrigé de l'exercice 2 : Formulation d'un cocktail de jus de fruits

Production agroalimentaire (mélange)

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = volume de jus d'orange par lot (en litres) ;

— y = volume de jus de pomme par lot (en litres) ;

— z = volume de jus de mangue par lot (en litres) ;

Traduction des contraintes.

— Volume du lot (100 litres) : $x + y + z = 100$

— Coût matière du lot (620 MAD) : $6x + 4y + 10z = 620$

— Teneur en sucre (10,6 litres de sucre par lot) : $0{,}09x + 0{,}11y + 0{,}14z = 10{,}6$

On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 6x + 4y + 10z = 620 \\ 0{,}09x + 0{,}11y + 0{,}14z = 10{,}6 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 10 \\ 0{,}09 & 0{,}11 & 0{,}14 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 620 \\ 10{,}6 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 6 & 4 & 10 & 620 \\ 0{,}09 & 0{,}11 & 0{,}14 & 10{,}6 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 6 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 six fois la ligne L_1 (car $6 - 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 100 \\ \textcircled{6} & 4 & 10 & 620 \\ 0{,}09 & 0{,}11 & 0{,}14 & 10{,}6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_2 - 6L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -2 & 4 & 20 \\ 0{,}09 & 0{,}11 & 0{,}14 & 10{,}6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $6 - 6 \times 1 = 0$; $4 - 6 \times 1 = -2$; $10 - 6 \times 1 = 4$; $620 - 6 \times 100 = 20$.

Transformation 2. Pour annuler le 0,09 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_1 multipliée par 0,09 (car $0{,}09 - 0{,}09 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -2 & 4 & 20 \\ \textcircled{0{,}09} & 0{,}11 & 0{,}14 & 10{,}6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 0{,}09L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -2 & 4 & 20 \\ 0 & 0{,}02 & 0{,}05 & 1{,}6 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}09 - 0{,}09 \times 1 = 0$; $0{,}11 - 0{,}09 \times 1 = 0{,}02$; $0{,}14 - 0{,}09 \times 1 = 0{,}05$; $10{,}6 - 0{,}09 \times 100 = 1{,}6$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & \boxed{-2} & 4 & 20 \\ 0 & 0{,}02 & 0{,}05 & 1{,}6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0{,}02 & 0{,}05 & 1{,}6 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 4 = -2$; $-\frac{1}{2} \times 20 = -10$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 0,02 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_2 multipliée par 0,02 (car $0{,}02 - 0{,}02 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -10 \\ 0 & \textcircled{0{,}02} & 0{,}05 & 1{,}6 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 0{,}02L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0{,}09 & 1{,}8 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}02 - 0{,}02 \times 1 = 0$; $0{,}05 - 0{,}02 \times (-2) = 0{,}09$; $1{,}6 - 0{,}02 \times (-10) = 1{,}8$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 0,09. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{0{,}09}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{0{,}09}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{0{,}09} & 1{,}8 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{0{,}09}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{0{,}09} \times 0{,}09 = 1$; $\frac{1}{0{,}09} \times 1{,}8 = 20$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 100 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & -10 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 20 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_2 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 6. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_3 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $-10 + 2 \times 20 = 30$.

Transformation 7. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 80 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $100 - 1 \times 20 = 80$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 8. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{1} & 0 & 80 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $80 - 1 \times 30 = 50$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 50 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 30 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 20 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 50 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 30 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 20 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 30 \\ z = 20 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1} : 1 \times 50 + 1 \times 30 + 1 \times 20 = 50 + 30 + 20 = 100 \checkmark$$
$$\text{équation 2} : 6 \times 50 + 4 \times 30 + 10 \times 20 = 300 + 120 + 200 = 620 \checkmark$$
$$\text{équation 3} : 0{,}09 \times 50 + 0{,}11 \times 30 + 0{,}14 \times 20 = 4{,}5 + 3{,}3 + 2{,}8 = 10{,}6 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_2$ admet une **solution unique** : $x = 50$, $y = 30$, $z = 20$, soit

$$\mathbb{S} = \{(50, 30, 20)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

La recette d'un lot de 100 litres est : **50 litres d'orange, 30 litres de pomme et 20 litres de mangue**, soit une formule 50 % − 30 % − 20 %. Les trois volumes sont positifs : la recette est réalisable. Le coût matière est alors de 6,20 MAD par litre de cocktail, et la teneur en sucre respecte exactement le cahier des charges du service qualité.

Corrigé de l'exercice 3 : Répartition secondaire avec prestations réciproques

Comptabilité de gestion

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = coût total du centre Entretien (en milliers de MAD) ;

— y = coût total du centre Énergie (en milliers de MAD) ;

— z = coût total du centre Administration (en milliers de MAD) ;

Traduction des contraintes. Le coût total d'un centre est égal à ses charges primaires augmentées des prestations qu'il reçoit des autres centres. On fait ensuite passer toutes les inconnues à gauche du signe =.

— Centre Entretien : $x = 114 + 0{,}2y + 0{,}2z$: $\quad x - 0{,}2y - 0{,}2z = 114$

— Centre Énergie : $y = 80 + 0{,}25z$: $\quad y - 0{,}25z = 80$

— Centre Administration : $z = 30 + 0{,}2x + 0{,}2y$: $\quad -0{,}2x - 0{,}2y + z = 30$

On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} x - 0{,}2y - 0{,}2z = 114 \\ y - 0{,}25z = 80 \\ -0{,}2x - 0{,}2y + z = 30 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 2 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 0 & 1 & -0{,}25 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 114 \\ 80 \\ 30 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & -0{,}2 & 114 \\ 0 & 1 & -0{,}25 & 80 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 1. Pour annuler le $-0{,}2$ de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 la ligne L_1 multipliée par 0,2 (car $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -0{,}2 & -0{,}2 & 114 \\ 0 & 1 & -0{,}25 & 80 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 1 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 0{,}2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & -0{,}2 & 114 \\ 0 & 1 & -0{,}25 & 80 \\ 0 & -0{,}24 & 0{,}96 & 52{,}8 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$; $-0{,}2 + 0{,}2 \times (-0{,}2) = -0{,}24$; $1 + 0{,}2 \times (-0{,}2) = 0{,}96$; $30 + 0{,}2 \times 114 = 52{,}8$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 2. Pour annuler le $-0{,}24$ de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 la ligne L_2 multipliée par 0,24 (car $-0{,}24 + 0{,}24 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & -0{,}2 & 114 \\ 0 & \boxed{1} & -0{,}25 & 80 \\ 0 & -0{,}24 & 0{,}96 & 52{,}8 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 0{,}24 L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & -0{,}2 & 114 \\ 0 & 1 & -0{,}25 & 80 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 72 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}24 + 0{,}24 \times 1 = 0$; $0{,}96 + 0{,}24 \times (-0{,}25) = 0{,}9$; $52{,}8 + 0{,}24 \times 80 = 72$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 0,9. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{0{,}9}$.

Transformation 3. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{0{,}9}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & -0{,}2 & 114 \\ 0 & 1 & -0{,}25 & 80 \\ 0 & 0 & \boxed{0{,}9} & 72 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{0{,}9} L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & -0{,}2 & 114 \\ 0 & 1 & -0{,}25 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{0{,}9} \times 0{,}9 = 1$; $\frac{1}{0{,}9} \times 72 = 80$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -0{,}2 & -0{,}2 & 114 \\ 0 & \mathbf{1} & -0{,}25 & 80 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 80 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_3 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 4. Pour annuler le $-0{,}25$ de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 la ligne L_3 multipliée par 0,25 (car $-0{,}25 + 0{,}25 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & -0{,}2 & 114 \\ 0 & 1 & -0{,}25 & 80 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 80 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 0{,}25L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & -0{,}2 & 114 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}25 + 0{,}25 \times 1 = 0$; $80 + 0{,}25 \times 80 = 100$.

Transformation 5. Pour annuler le $-0{,}2$ de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 la ligne L_3 multipliée par 0,2 (car $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & -0{,}2 & 114 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 80 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + 0{,}2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & 0 & 130 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$; $114 + 0{,}2 \times 80 = 130$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 6. Pour annuler le $-0{,}2$ de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 la ligne L_2 multipliée par 0,2 (car $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & 0 & 130 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + 0{,}2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$; $0 + 0{,}2 \times 0 = 0$; $130 + 0{,}2 \times 100 = 150$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 150 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 100 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 80 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 150 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 100 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 80 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 150 \\ y = 100 \\ z = 80 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1 : } 1 \times 150 + (-0{,}2) \times 100 + (-0{,}2) \times 80 = 150 - 20 - 16 = 114 \ \checkmark$$
$$\text{équation 2 : } 1 \times 100 + (-0{,}25) \times 80 = 100 - 20 = 80 \ \checkmark$$
$$\text{équation 3 : } (-0{,}2) \times 150 + (-0{,}2) \times 100 + 1 \times 80 = -30 - 20 + 80 = 30 \ \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_3$ admet une **solution unique** : $x = 150$, $y = 100$, $z = 80$, soit

$$\mathrm{S} = \{(150, 100, 80)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

Les coûts totaux à répartir sont : **150 milliers de MAD pour l'Entretien, 100 pour l'Énergie et 80 pour l'Administration**. Ces montants dépassent les charges primaires (114, 80 et 30) car chaque centre supporte une partie du coût des services qu'il consomme. Par exemple, le centre Entretien cède 20 % de son total à l'Administration (30 milliers de MAD) et les 80 % restants (120 milliers de MAD) aux centres principaux. Ce sont ces coûts totaux, et non les charges primaires, qui doivent servir au calcul des coûts de revient.

Corrigé de l'exercice 4 : Allocation d'un budget publicitaire

Marketing

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = budget digital (en milliers de MAD) ;

— y = budget télévision (en milliers de MAD) ;

— z = budget affichage (en milliers de MAD) ;

Traduction des contraintes.

— Budget total (300 milliers de MAD) : $x + y + z = 300$

— Exigence d'image : $y = x + z$: $-x + y - z = 0$

— Objectif de contacts (1 800 milliers) : $8x + 5y + 3z = 1800$

On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_4 : \begin{cases} x + y + z = 300 \\ -x + y - z = 0 \\ 8x + 5y + 3z = 1800 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 1800 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 1800 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le -1 de L_2 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 300 \\ \textcircled{-1} & 1 & -1 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 1800 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 2 & 0 & 300 \\ 8 & 5 & 3 & 1800 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $1 + 1 \times 1 = 2$; $-1 + 1 \times 1 = 0$; $0 + 1 \times 300 = 300$.

Transformation 2. Pour annuler le 8 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 huit fois la ligne L_1 (car $8 - 8 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 2 & 0 & 300 \\ \textcircled{8} & 5 & 3 & 1800 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 8L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 2 & 0 & 300 \\ 0 & -3 & -5 & -600 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $8 - 8 \times 1 = 0$; $5 - 8 \times 1 = -3$; $3 - 8 \times 1 = -5$; $1800 - 8 \times 300 = -600$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 300 \\ 0 & -3 & -5 & -600 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & -3 & -5 & -600 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 0 = 0$; $\frac{1}{2} \times 300 = 150$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le -3 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $-3 + 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 150 \\ 0 & \textcircled{-3} & -5 & -600 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & -5 & -150 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3 + 3 \times 1 = 0$; $-5 + 3 \times 0 = -5$; $-600 + 3 \times 150 = -150$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -5. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $-\frac{1}{5}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{5}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & -150 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{5}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{5} \times (-5) = 1$; $-\frac{1}{5} \times (-150) = 30$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 300 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 150 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 30 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_4 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 6. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \textcircled{1} & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 270 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $300 - 1 \times 30 = 270$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 7. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{1} & 0 & 270 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $270 - 1 \times 150 = 120$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 120 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 150 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 30 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 120 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 150 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 30 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 120 \\ y = 150 \\ z = 30 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1 : } 1 \times 120 + 1 \times 150 + 1 \times 30 = 120 + 150 + 30 = 300 \ \checkmark \\ &\text{équation 2 : } (-1) \times 120 + 1 \times 150 + (-1) \times 30 = -120 + 150 - 30 = 0 \ \checkmark \\ &\text{équation 3 : } 8 \times 120 + 5 \times 150 + 3 \times 30 = 960 + 750 + 90 = 1800 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_4$ admet une **solution unique** : $x = 120$, $y = 150$, $z = 30$, soit

$$\mathbb{S} = \{(120, 150, 30)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

Café Nour doit investir **120 milliers de MAD dans le digital, 150 dans la télévision et 30 dans l'affichage**. Les trois montants sont positifs : le plan média est réalisable. La télévision représente la moitié du budget, conformément à l'exigence d'image, et l'objectif de 1,8 million de contacts est atteint exactement. Le digital, canal le plus efficace, reçoit 40 % du budget.

Corrigé de l'exercice 5 : Structuration d'un financement par emprunts

Finance d'entreprise

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = montant emprunté à la banque A (en milliers de MAD) ;

— y = montant emprunté à la banque B (en milliers de MAD) ;

— z = montant financé par crédit-bail (en milliers de MAD) ;

Traduction des contraintes.

— Montant total à financer : $x + y + z = 2000$

— Charge d'intérêts de la première année : $0{,}04x + 0{,}05y + 0{,}08z = 105$

— Banque A = double du crédit-bail : $x = 2z$: $x - 2z = 0$

On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_5 : \begin{cases} x + y + z = 2000 \\ 0{,}04x + 0{,}05y + 0{,}08z = 105 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 3 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}08 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2000 \\ 105 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}08 & 105 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 0,04 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 la ligne L_1 multipliée par 0,04 (car $0{,}04 - 0{,}04 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2000 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}08 & 105 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 0{,}04L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}04 & 25 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}04 - 0{,}04 \times 1 = 0$; $0{,}05 - 0{,}04 \times 1 = 0{,}01$; $0{,}08 - 0{,}04 \times 1 = 0{,}04$; $105 - 0{,}04 \times 2000 = 25$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}04 & 25 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}04 & 25 \\ 0 & -1 & -3 & -2000 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 1 = -1$; $-2 - 1 \times 1 = -3$; $0 - 1 \times 2000 = -2000$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 0,01. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{0{,}01}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{0{,}01}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & \boxed{0{,}01} & 0{,}04 & 25 \\ 0 & -1 & -3 & -2000 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{0{,}01}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 4 & 2500 \\ 0 & -1 & -3 & -2000 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{0{,}01} \times 0{,}01 = 1$; $\frac{1}{0{,}01} \times 0{,}04 = 4$; $\frac{1}{0{,}01} \times 25 = 2500$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le -1 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 2500 \\ 0 & (-1) & -3 & -2000 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 4 & 2500 \\ 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1+1\times 1=0$; $-3+1\times 4=1$; $-2000+1\times 2500=500$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 2500 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 500 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B)=3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A)=3$.

$$\text{rang}(A)=\text{rang}(A|B)=3=m \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{S}_5 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 5. Pour annuler le 4 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 quatre fois la ligne L_3 (car $4 - 4 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & \textcircled{4} & 2500 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 500 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 4L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $4 - 4 \times 1 = 0$; $2500 - 4 \times 500 = 500$.

Transformation 6. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \textcircled{1} & 2000 \\ 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 500 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1500 \\ 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $2000 - 1 \times 500 = 1500$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 7. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{1} & 0 & 1500 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $1500 - 1 \times 500 = 1000$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 500 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 500 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 500 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 500 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 1000 \\ y = 500 \\ z = 500 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1 : } 1 \times 1000 + 1 \times 500 + 1 \times 500 = 1000 + 500 + 500 = 2000 \ \checkmark$$
$$\text{équation 2 : } 0{,}04 \times 1000 + 0{,}05 \times 500 + 0{,}08 \times 500 = 40 + 25 + 40 = 105 \ \checkmark$$
$$\text{équation 3 : } 1 \times 1000 + (-2) \times 500 = 1000 - 1000 = 0 \ \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_5$ admet une **solution unique** : $x = 1000$, $y = 500$, $z = 500$, soit

$$\mathbb{S} = \{(1000, 500, 500)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

Le plan de financement est : **1 000 milliers de MAD auprès de la banque A, 500 auprès de la banque B et 500 en crédit-bail**. Les trois montants sont positifs, donc réalisables. Le coût moyen du financement est de $105/2\,000 = 5{,}25\,\%$. La banque A, la moins chère, finance la moitié de l'investissement, ce qui est cohérent avec l'objectif de maîtrise des frais financiers.

Corrigé de l'exercice 6 : Optimisation du chargement d'un camion

Logistique

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = nombre de colis de type A ;

— y = nombre de colis de type B ;

— z = nombre de colis de type C ;

Traduction des contraintes.

— Compartiment des colis fragiles (60 colis B et C) : $y + z = 60$

— Charge utile (2 000 kg) : $20x + 15y + 30z = 2000$

— Volume utile (18 m^3) : $0{,}2x + 0{,}1y + 0{,}3z = 18$

On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_6 : \begin{cases} y + z = 60 \\ 20x + 15y + 30z = 2000 \\ 0{,}2x + 0{,}1y + 0{,}3z = 18 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 20 & 15 & 30 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 60 \\ 2000 \\ 18 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 60 \\ 20 & 15 & 30 & 2000 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 18 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_2, située plus bas, a un coefficient non nul (20) dans cette colonne : on échange L_1 et L_2 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 60 \\ 20 & 15 & 30 & 2000 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 15 & 30 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 18 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 20. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{20}$.

Transformation 2. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{20}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{20} & 15 & 30 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{20}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & 1{,}5 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 18 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{20} \times 20 = 1$; $\frac{1}{20} \times 15 = 0{,}75$; $\frac{1}{20} \times 30 = 1{,}5$; $\frac{1}{20} \times 2000 = 100$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 3. Pour annuler le 0,2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_1 multipliée par 0,2 (car $0{,}2 - 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0{,}75 & 1{,}5 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ \textcircled{0{,}2} & 0{,}1 & 0{,}3 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 0{,}2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & 1{,}5 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -0{,}05 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}2 - 0{,}2 \times 1 = 0$; $0{,}1 - 0{,}2 \times 0{,}75 = -0{,}05$; $0{,}3 - 0{,}2 \times 1{,}5 = 0$; $18 - 0{,}2 \times 100 = -2$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le $-0{,}05$ de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 la ligne L_2 multipliée par 0,05 (car $-0{,}05 + 0{,}05 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & 1{,}5 & 100 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 60 \\ 0 & -0{,}05 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 0{,}05 L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & 1{,}5 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}05 + 0{,}05 \times 1 = 0$; $0 + 0{,}05 \times 1 = 0{,}05$; $-2 + 0{,}05 \times 60 = 1$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 0,05. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{0{,}05}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{0{,}05}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & 1{,}5 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & \boxed{0{,}05} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{0{,}05} L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & 1{,}5 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{0{,}05} \times 0{,}05 = 1$; $\frac{1}{0{,}05} \times 1 = 20$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0{,}75 & 1{,}5 & 100 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 60 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 20 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_6 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 6. Pour annuler le 1 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & 1{,}5 & 100 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 60 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & 1{,}5 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $60 - 1 \times 20 = 40$.

Transformation 7. Pour annuler le 1,5 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 la ligne L_3 multipliée par 1,5 (car $1{,}5 - 1{,}5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & \boxed{1{,}5} & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 1{,}5L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}75 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1{,}5 - 1{,}5 \times 1 = 0$; $100 - 1{,}5 \times 20 = 70$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 8. Pour annuler le 0,75 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 la ligne L_2 multipliée par 0,75 (car $0{,}75 - 0{,}75 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{0{,}75} & 0 & 70 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 0{,}75L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}75 - 0{,}75 \times 1 = 0$; $0 - 0{,}75 \times 0 = 0$; $70 - 0{,}75 \times 40 = 40$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 40 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 40 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 20 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 40 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 40 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 20 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 40 \\ z = 20 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

équation 1 : $1 \times 40 + 1 \times 20 = 40 + 20 = 60$ ✓
équation 2 : $20 \times 40 + 15 \times 40 + 30 \times 20 = 800 + 600 + 600 = 2000$ ✓
équation 3 : $0{,}2 \times 40 + 0{,}1 \times 40 + 0{,}3 \times 20 = 8 + 4 + 6 = 18$ ✓

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_6$ admet une **solution unique** : $x = 40$, $y = 40$, $z = 20$, soit

$$\mathrm{S} = \{(40, 40, 20)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

Le camion doit transporter **40 colis A, 40 colis B et 20 colis C**. Ces nombres sont entiers et positifs : le chargement est réalisable. Le camion part à pleine charge (2 000 kg) et à plein volume (18 m^3), ce qui minimise le coût de transport par colis. Remarquons que la première équation ne contenait pas x : il a fallu commencer par une permutation de lignes.

Corrigé de l'exercice 7 : Calcul du coût des unités d'œuvre

Contrôle de gestion

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = coût d'une heure-machine (en MAD) ;

— y = coût d'une heure de main-d'œuvre (en MAD) ;

— z = coût d'un sac de matière première (en MAD) ;

Traduction des contraintes. On a choisi d'écrire l'ordre C avant l'ordre B : l'ordre des équations ne change pas le système, mais il rend ici les calculs plus simples.

— Ordre de fabrication A : $10x + 5y + 2z = 900$

— Ordre de fabrication C : $6x + 2y + 5z = 860$

— Ordre de fabrication B : $4x + 10y + 3z = 1060$

On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_7 : \begin{cases} 10x + 5y + 2z = 900 \\ 6x + 2y + 5z = 860 \\ 4x + 10y + 3z = 1060 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 900 \\ 860 \\ 1060 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 5 & 2 & 900 \\ 6 & 2 & 5 & 860 \\ 4 & 10 & 3 & 1060 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 10. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{10}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{10}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{10} & 5 & 2 & 900 \\ 6 & 2 & 5 & 860 \\ 4 & 10 & 3 & 1060 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{10}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 6 & 2 & 5 & 860 \\ 4 & 10 & 3 & 1060 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{10} \times 10 = 1$; $\frac{1}{10} \times 5 = 0{,}5$; $\frac{1}{10} \times 2 = 0{,}2$; $\frac{1}{10} \times 900 = 90$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 2. Pour annuler le 6 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 six fois la ligne L_1 (car $6 - 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ \textcircled{6} & 2 & 5 & 860 \\ 4 & 10 & 3 & 1060 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 6L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & -1 & 3{,}8 & 320 \\ 4 & 10 & 3 & 1060 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $6 - 6 \times 1 = 0$; $2 - 6 \times 0{,}5 = -1$; $5 - 6 \times 0{,}2 = 3{,}8$; $860 - 6 \times 90 = 320$.

Transformation 3. Pour annuler le 4 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 quatre fois la ligne L_1 (car $4 - 4 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & -1 & 3{,}8 & 320 \\ \textcircled{4} & 10 & 3 & 1060 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 4L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & -1 & 3{,}8 & 320 \\ 0 & 8 & 2{,}2 & 700 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $4 - 4 \times 1 = 0$; $10 - 4 \times 0{,}5 = 8$; $3 - 4 \times 0{,}2 = 2{,}2$; $1060 - 4 \times 90 = 700$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -1. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par -1.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & \boxed{-1} & 3{,}8 & 320 \\ 0 & 8 & 2{,}2 & 700 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & 1 & -3{,}8 & -320 \\ 0 & 8 & 2{,}2 & 700 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 3{,}8=-3{,}8$; $(-1)\times 320=-320$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le 8 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 huit fois la ligne L_2 (car $8-8\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & \boxed{1} & -3{,}8 & -320 \\ 0 & \textcircled{8} & 2{,}2 & 700 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3-8L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & 1 & -3{,}8 & -320 \\ 0 & 0 & 32{,}6 & 3260 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $8-8\times 1=0$; $2{,}2-8\times(-3{,}8)=32{,}6$; $700-8\times(-320)=3260$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 32,6. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{32{,}6}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{32{,}6}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & 1 & -3{,}8 & -320 \\ 0 & 0 & \boxed{32{,}6} & 3260 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{32{,}6}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & 1 & -3{,}8 & -320 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{32{,}6}\times 32{,}6=1$; $\frac{1}{32{,}6}\times 3260=100$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & \mathbf{1} & -3{,}8 & -320 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 100 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_7 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 7. Pour annuler le $-3{,}8$ de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 la ligne L_3 multipliée par 3,8 (car $-3{,}8 + 3{,}8 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & 1 & -3{,}8 & -320 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 3{,}8L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3{,}8 + 3{,}8 \times 1 = 0$; $-320 + 3{,}8 \times 100 = 60$.

Transformation 8. Pour annuler le 0,2 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 la ligne L_3 multipliée par 0,2 (car $0{,}2 - 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 0{,}2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}2 - 0{,}2 \times 1 = 0$; $90 - 0{,}2 \times 100 = 70$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 9. Pour annuler le 0,5 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 la ligne L_2 multipliée par 0,5 (car $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 0{,}5L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$; $0 - 0{,}5 \times 0 = 0$; $70 - 0{,}5 \times 60 = 40$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 40 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 60 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 100 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 40 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 60 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 100 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 60 \\ z = 100 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1 : } 10 \times 40 + 5 \times 60 + 2 \times 100 = 400 + 300 + 200 = 900 \ \checkmark$$
$$\text{équation 2 : } 6 \times 40 + 2 \times 60 + 5 \times 100 = 240 + 120 + 500 = 860 \ \checkmark$$
$$\text{équation 3 : } 4 \times 40 + 10 \times 60 + 3 \times 100 = 160 + 600 + 300 = 1060 \ \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_7$ admet une **solution unique** : $x = 40$, $y = 60$, $z = 100$, soit

$$\mathbb{S} = \{(40, 60, 100)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

Les coûts des unités d'œuvre sont : **40 MAD par heure-machine, 60 MAD par heure de main-d'œuvre et 100 MAD par sac de matière**. Ils sont positifs, donc cohérents. Le contrôleur peut maintenant chiffrer à l'avance tout nouvel ordre. Par exemple, un ordre de 8 heures-machine, 6 heures de main-d'œuvre et 4 sacs coûtera $8 \times 40 + 6 \times 60 + 4 \times 100 = 1\,080$ MAD.

Corrigé de l'exercice 8 : Seuil de rentabilité multi-produits

Contrôle de gestion

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = quantité d'appareils A vendus ;

— y = quantité d'appareils B vendus ;

— z = quantité d'appareils C vendus ;

Traduction des contraintes.

— Composition des ventes : $y = 2z$: $\quad y - 2z = 0$

— Composition des ventes : $x = 3z$: $\quad x - 3z = 0$

— Seuil : marge sur coût variable = charges fixes : $\quad 20x + 30y + 50z = 170\,000$

On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_8 : \begin{cases} y - 2z = 0 \\ x - 3z = 0 \\ 20x + 30y + 50z = 170\,000 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 ; y n'apparaît pas dans l'équation 2 : les coefficients correspondants valent 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 20 & 30 & 50 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170\,000 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 20 & 30 & 50 & 170\,000 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_2, située plus bas, a un coefficient non nul (1) dans cette colonne : on échange L_1 et L_2 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 20 & 30 & 50 & 170\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 20 & 30 & 50 & 170\,000 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 2. Pour annuler le 20 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_1 multipliée par 20 (car $20 - 20 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ \textcircled{20} & 30 & 50 & 170\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 20L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 30 & 110 & 170\,000 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $20 - 20 \times 1 = 0$; $30 - 20 \times 0 = 30$; $50 - 20 \times (-3) = 110$; $170\,000 - 20 \times 0 = 170\,000$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 3. Pour annuler le 30 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_2 multipliée par 30 (car $30 - 30 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & \textcircled{30} & 110 & 170\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 30L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 170 & 170\,000 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $30 - 30 \times 1 = 0$; $110 - 30 \times (-2) = 170$; $170\,000 - 30 \times 0 = 170\,000$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 170. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{170}$.

Transformation 4. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{170}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{170} & 170\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{170}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1000 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{170} \times 170 = 1$; $\frac{1}{170} \times 170\,000 = 1000$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1000 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_8 \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 5. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_3 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1000 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2+2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1000 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $0+2\times 1000=2000$.

Transformation 6. Pour annuler le -3 de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 trois fois la ligne L_3 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1000 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1+3L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3000 \\ 0 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1000 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3+3\times 1=0$; $0+3\times 1000=3000$.

Pivot de L_2, colonne 2. Au-dessus de ce pivot, les coefficients sont déjà nuls : rien à faire.

Le coefficient de L_1 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 3000 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1000 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 3000 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1000 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 3000 \\ y = 2000 \\ z = 1000 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

équation 1 : $1 \times 2000 + (-2) \times 1000 = 2000 - 2000 = 0$ ✓
équation 2 : $1 \times 3000 + (-3) \times 1000 = 3000 - 3000 = 0$ ✓
équation 3 : $20 \times 3000 + 30 \times 2000 + 50 \times 1000 = 60\,000 + 60\,000 + 50\,000 = 170\,000$ ✓

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_8$ admet une **solution unique** : $x = 3000$, $y = 2000$, $z = 1000$, soit

$$\mathbb{S} = \{(3000, 2000, 1000)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

Le seuil de rentabilité est atteint pour **3 000 appareils A, 2 000 appareils B et 1 000 appareils C**, soit 6 000 appareils au total. En dessous de ces volumes, l'entreprise est déficitaire ; au-delà, chaque appareil vendu (dans la même composition) contribue au bénéfice. La direction commerciale peut comparer ces quantités à ses prévisions de ventes pour apprécier la marge de sécurité.

Corrigé de l'exercice 9 : Placement d'un excédent de trésorerie

Trésorerie

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = montant placé en dépôt à terme (en milliers de MAD) ;

— y = montant placé en bons du Trésor (en milliers de MAD) ;

— z = montant placé en OPCVM (en milliers de MAD) ;

Traduction des contraintes.

— Montant total placé : $x + y + z = 1000$

— Revenu annuel visé (41 milliers de MAD) : $0{,}03x + 0{,}04y + 0{,}05z = 41$

— Indice de risque moyen (2,1) : $x + 2y + 3z = 2100$

On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_9 : \begin{cases} x + y + z = 1000 \\ 0{,}03x + 0{,}04y + 0{,}05z = 41 \\ x + 2y + 3z = 2100 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}05 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1000 \\ 41 \\ 2100 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}05 & 41 \\ 1 & 2 & 3 & 2100 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 0,03 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 la ligne L_1 multipliée par 0,03 (car $0{,}03 - 0{,}03 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1000 \\ \textcircled{0{,}03} & 0{,}04 & 0{,}05 & 41 \\ 1 & 2 & 3 & 2100 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 0{,}03L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}02 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 2100 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}03 - 0{,}03 \times 1 = 0$; $0{,}04 - 0{,}03 \times 1 = 0{,}01$; $0{,}05 - 0{,}03 \times 1 = 0{,}02$; $41 - 0{,}03 \times 1000 = 11$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}02 & 11 \\ \textcircled{1} & 2 & 3 & 2100 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}02 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 1100 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $2 - 1 \times 1 = 1$; $3 - 1 \times 1 = 2$; $2100 - 1 \times 1000 = 1100$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 0,01. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{0{,}01}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{0{,}01}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & \boxed{0{,}01} & 0{,}02 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 1100 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{0{,}01}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 2 & 1100 \\ 0 & 1 & 2 & 1100 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{0{,}01} \times 0{,}01 = 1$; $\frac{1}{0{,}01} \times 0{,}02 = 2$; $\frac{1}{0{,}01} \times 11 = 1100$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1100 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 1100 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 2 & 1100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $2 - 1 \times 2 = 0$; $1100 - 1 \times 1100 = 0$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_3 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 2, donc $\text{rang}(A|B) = 2$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < m = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_9 \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 5. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{1} & 1 & 1000 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 1 & 2 & 1100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 2 = -1$; $1000 - 1 \times 1100 = -100$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & -100 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & -100 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - z = -100 \\ y + 2z = 1100 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : z.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = -100 + \alpha \\ y = 1100 - 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Étape 7 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = -99$, $y = 1098$, $z = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1} : 1 \times (-99) + 1 \times 1098 + 1 \times 1 = -99 + 1098 + 1 = 1000 \checkmark$$
$$\text{équation 2} : 0{,}03 \times (-99) + 0{,}04 \times 1098 + 0{,}05 \times 1 = -2{,}97 + 43{,}92 + 0{,}05 = 41 \checkmark$$
$$\text{équation 3} : 1 \times (-99) + 2 \times 1098 + 3 \times 1 = -99 + 2196 + 3 = 2100 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_9$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \left\{ (-100 + \alpha, 1100 - 2\alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Étape 8 Interprétation managériale

Toutes les quantités doivent être positives (ou nulles). On écrit cette condition pour chaque inconnue qui dépend du paramètre :

$$x = -100 + \alpha \geq 0$$
$$y = 1100 - 2\alpha \geq 0$$
$$z = \alpha \geq 0$$

Ces conditions sont toutes vérifiées lorsque $\boxed{100 \leq \alpha \leq 550}$. Par exemple, pour $\alpha = 325$, on obtient $x = 225$, $y = 450$, $z = 325$.

La troisième contrainte (le risque) est en réalité une conséquence des deux premières : elle n'apporte pas d'information nouvelle, d'où la ligne nulle. Le trésorier dispose donc d'une **marge de manœuvre** : il peut choisir librement le montant placé en OPCVM, à condition que tous les montants restent positifs. Il choisira selon d'autres critères, par exemple la liquidité : plus α est petit, moins il place en OPCVM et plus il place en bons du Trésor.

Corrigé de l'exercice 10 : Cahier des charges d'un engrais composé

Production chimique (mélange)

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = quantité d'engrais A (en tonnes) ;

— y = quantité d'engrais B (en tonnes) ;

— z = quantité d'engrais C (en tonnes) ;

Traduction des contraintes.

— Quantité commandée (100 tonnes) : $x + y + z = 100$

— Azote : 15 tonnes dans le mélange : $0{,}2x + 0{,}1y + 0{,}15z = 15$

— Potassium : 12 tonnes dans le mélange : $0{,}1x + 0{,}1y + 0{,}1z = 12$

On obtient le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_{10} : \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0{,}2x + 0{,}1y + 0{,}15z = 15 \\ 0{,}1x + 0{,}1y + 0{,}1z = 12 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}15 & 15 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 12 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 0,2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 la ligne L_1 multipliée par 0,2 (car $0{,}2 - 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 100 \\ \textcircled{0{,}2} & 0{,}1 & 0{,}15 & 15 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 0{,}2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -0{,}1 & -0{,}05 & -5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 12 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}2 - 0{,}2 \times 1 = 0$; $0{,}1 - 0{,}2 \times 1 = -0{,}1$; $0{,}15 - 0{,}2 \times 1 = -0{,}05$; $15 - 0{,}2 \times 100 = -5$.

Transformation 2. Pour annuler le 0,1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_1 multipliée par 0,1 (car $0{,}1 - 0{,}1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -0{,}1 & -0{,}05 & -5 \\ \textcircled{0{,}1} & 0{,}1 & 0{,}1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 0{,}1L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -0{,}1 & -0{,}05 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}1 - 0{,}1 \times 1 = 0$; $0{,}1 - 0{,}1 \times 1 = 0$; $0{,}1 - 0{,}1 \times 1 = 0$; $12 - 0{,}1 \times 100 = 2$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut $-0{,}1$. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{0{,}1}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{0{,}1}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & \boxed{-0{,}1} & -0{,}05 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{0{,}1}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{0{,}1} \times (-0{,}1) = 1$; $-\frac{1}{0{,}1} \times (-0{,}05) = 0{,}5$; $-\frac{1}{0{,}1} \times (-5) = 50$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. Le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) vaut 0, de même que ceux des lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **Cette colonne n'a donc pas de pivot**. On passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_3.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, les lignes restantes ne contiennent plus que des zéros, mais leur second membre n'est pas nul : chacune traduit une **équation impossible**. On fait apparaître un pivot dans la colonne des constantes (et des zéros sous lui) pour lire correctement le rang de $A|B$. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 4. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

La colonne des constantes est traitée.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 100 \\ 0 & \mathbf{1} & 0{,}5 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 2, donc $\text{rang}(A) = 2$.

$$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A|B) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{10} \text{ est incompatible.}$$

En effet, la ligne L_3 de $A_e|B_e$ est de la forme $(0 \cdots 0 \mid 1)$: elle traduit l'équation

$$0x + 0y + 0z = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 = 1,$$

ce qui est **impossible**. Aucune valeur des inconnues ne peut vérifier cette équation : il est donc inutile de poursuivre avec la remontée.

Le système $\mathcal{S}_{10}$ est incompatible :

$$\mathrm{S} = \emptyset.$$

Étape 5 Interprétation managériale

Le cahier des charges est irréalisable. L'explication est simple : les trois engrais contiennent tous 10 % de potassium, donc n'importe quel mélange en contient aussi 10 %, jamais 12 %. Le responsable de production doit en informer le client et lui proposer une alternative : accepter un mélange à 10 % de potassium, ou bien acheter un quatrième engrais plus riche en potassium (par exemple du chlorure de potassium) pour l'ajouter au mélange.

Corrigé de l'exercice 11 : Programme de production dans la confection

Gestion de production

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = nombre de chemises par jour ;

— y = nombre de pantalons par jour ;

— z = nombre de vestes par jour ;

— t = nombre de robes par jour ;

Traduction des contraintes.

— Atelier de coupe (50 heures) : $x + y + 2z + t = 50$

— Atelier de couture (120 heures) : $2x + 3y + 4z + 3t = 120$

— Atelier de finition (65 heures) : $x + y + 3z + 2t = 65$

On obtient le système de 3 équations à 4 inconnues :

$$\mathcal{S}_{11} : \begin{cases} x + y + 2z + t = 50 \\ 2x + 3y + 4z + 3t = 120 \\ x + y + 3z + 2t = 65 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 50 \\ 120 \\ 65 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 50 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 120 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 65 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 50 \\ \textcircled{2} & 3 & 4 & 3 & 120 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 65 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 65 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $3 - 2 \times 1 = 1$; $4 - 2 \times 2 = 0$; $3 - 2 \times 1 = 1$; $120 - 2 \times 50 = 20$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 20 \\ \textcircled{1} & 1 & 3 & 2 & 65 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 1 = 0$; $3 - 1 \times 2 = 1$; $2 - 1 \times 1 = 1$; $65 - 1 \times 50 = 15$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 & 50 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 15 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\operatorname{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\operatorname{rang}(A) = 3$.

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = 3 < m = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{11} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 deux fois la ligne L_3 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \textcircled{2} & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $1 - 2 \times 1 = -1$; $50 - 2 \times 15 = 20$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 4. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \textcircled{1} & 0 & -1 & 20 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $-1 - 1 \times 1 = -2$; $20 - 1 \times 20 = 0$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 15 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 15 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - 2t = 0 \\ y + t = 20 \\ z + t = 15 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y, z ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : t.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $t = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 20 - \alpha \\ z = 15 - \alpha \\ t = \alpha \end{cases}$$

Étape 7 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = 2$, $y = 19$, $z = 14$, $t = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned}
\text{équation 1} &: 1 \times 2 + 1 \times 19 + 2 \times 14 + 1 \times 1 \\
&= 2 + 19 + 28 + 1 = 50 \ \checkmark \\
\text{équation 2} &: 2 \times 2 + 3 \times 19 + 4 \times 14 + 3 \times 1 \\
&= 4 + 57 + 56 + 3 = 120 \ \checkmark \\
\text{équation 3} &: 1 \times 2 + 1 \times 19 + 3 \times 14 + 2 \times 1 \\
&= 2 + 19 + 42 + 2 = 65 \ \checkmark
\end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{11}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (2\alpha, 20 - \alpha, 15 - \alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Étape 8 Interprétation managériale

Toutes les quantités doivent être positives (ou nulles). On écrit cette condition pour chaque inconnue qui dépend du paramètre :

$$\begin{aligned}
x &= 2\alpha \geq 0 \\
y &= 20 - \alpha \geq 0 \\
z &= 15 - \alpha \geq 0 \\
t &= \alpha \geq 0
\end{aligned}$$

Ces conditions sont toutes vérifiées lorsque $\boxed{0 \leq \alpha \leq 15}$. Comme les quantités sont des nombres d'articles, α doit de plus être un entier. Par exemple, pour $\alpha = 5$, on obtient $x = 10$, $y = 15$, $z = 10$, $t = 5$.

Avec trois contraintes pour quatre produits, la direction dispose d'une **marge de manœuvre** : elle peut choisir librement le nombre de robes α, puis en déduire les autres quantités. Comme on fabrique des articles entiers, α doit être un entier. Ce choix sera guidé par la demande commerciale : si les robes se vendent bien, on augmente α (et donc le nombre de chemises), au détriment des pantalons et des vestes.

Corrigé de l'exercice 12 : Plan média sur quatre canaux

Marketing

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = budget digital (en milliers de MAD) ;

— y = budget télévision (en milliers de MAD) ;

— z = budget affichage (en milliers de MAD) ;

— t = budget presse (en milliers de MAD) ;

Traduction des contraintes.

— Budget total (500 milliers de MAD) : $x + y + z + t = 500$

— Objectif de contacts (3 400 milliers) : $10x + 6y + 4z + 2t = 3400$

— Digital = télévision + presse : $x = y + t$: $x - y - t = 0$

On obtient le système de 3 équations à 4 inconnues :

$$\mathcal{S}_{12} : \begin{cases} x + y + z + t = 500 \\ 10x + 6y + 4z + 2t = 3400 \\ x - y - t = 0 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : z n'apparaît pas dans l'équation 3 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 500 \\ 3400 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 10 & 6 & 4 & 2 & 3400 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 10 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 dix fois la ligne L_1 (car $10 - 10 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 500 \\ \textcircled{10} & 6 & 4 & 2 & 3400 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 10L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & -4 & -6 & -8 & -1600 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $10 - 10 \times 1 = 0$; $6 - 10 \times 1 = -4$; $4 - 10 \times 1 = -6$; $2 - 10 \times 1 = -8$; $3400 - 10 \times 500 = -1600$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & -4 & -6 & -8 & -1600 \\ \textcircled{1} & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & -4 & -6 & -8 & -1600 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -500 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-1 - 1 \times 1 = -2$; $0 - 1 \times 1 = -1$; $-1 - 1 \times 1 = -2$; $0 - 1 \times 500 = -500$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -4. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{4}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & \boxed{-4} & -6 & -8 & -1600 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -500 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{4}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & 2 & 400 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -500 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{4} \times (-4) = 1$; $-\frac{1}{4} \times (-6) = 1{,}5$; $-\frac{1}{4} \times (-8) = 2$; $-\frac{1}{4} \times (-1600) = 400$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le -2 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & \boxed{1} & 1{,}5 & 2 & 400 \\ 0 & \textcircled{-2} & -1 & -2 & -500 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & 2 & 400 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 300 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2+2\times 1=0$; $-1+2\times 1{,}5=2$; $-2+2\times 2=2$; $-500+2\times 400=300$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & 2 & 400 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & 300 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & 2 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2}\times 2=1$; $\frac{1}{2}\times 2=1$; $\frac{1}{2}\times 300=150$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & \mathbf{1} & 1{,}5 & 2 & 400 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 150 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 < m = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{12} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 6. Pour annuler le 1,5 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 la ligne L_3 multipliée par 1,5 (car $1{,}5 - 1{,}5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & 2 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 1{,}5L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 175 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1{,}5 - 1{,}5 \times 1 = 0$; $2 - 1{,}5 \times 1 = 0{,}5$; $400 - 1{,}5 \times 150 = 175$.

Transformation 7. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 175 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 175 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 1 = 0$; $500 - 1 \times 150 = 350$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 8. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 175 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 & 175 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 175 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $0 - 1 \times 0{,}5 = -0{,}5$; $350 - 1 \times 175 = 175$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -0{,}5 & 175 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0{,}5 & 175 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 150 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -0{,}5 & 175 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0{,}5 & 175 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 150 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 0{,}5t = 175 \\ y + 0{,}5t = 175 \\ z + t = 150 \end{array}\right.$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y, z ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : t.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $t = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\left\{\begin{array}{l} x = 175 + 0{,}5\alpha \\ y = 175 - 0{,}5\alpha \\ z = 150 - \alpha \\ t = \alpha \end{array}\right.$$

Étape 7 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = 175{,}5$, $y = 174{,}5$, $z = 149$, $t = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned}
&\text{équation 1} : 1 \times 175{,}5 + 1 \times 174{,}5 + 1 \times 149 + 1 \times 1 \\
&\qquad = 175{,}5 + 174{,}5 + 149 + 1 = 500 \ \checkmark \\
&\text{équation 2} : 10 \times 175{,}5 + 6 \times 174{,}5 + 4 \times 149 + 2 \times 1 \\
&\qquad = 1755 + 1047 + 596 + 2 = 3400 \ \checkmark \\
&\text{équation 3} : 1 \times 175{,}5 + (-1) \times 174{,}5 + (-1) \times 1 = 175{,}5 - 174{,}5 - 1 = 0 \ \checkmark
\end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{12}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \Big\{ (175 + 0{,}5\alpha, 175 - 0{,}5\alpha, 150 - \alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Étape 8 Interprétation managériale

Toutes les quantités doivent être positives (ou nulles). On écrit cette condition pour chaque inconnue qui dépend du paramètre :

$$\begin{aligned}
x = 175 + 0{,}5\alpha \geq 0 \\
y = 175 - 0{,}5\alpha \geq 0 \\
z = 150 - \alpha \geq 0 \\
t = \alpha \geq 0
\end{aligned}$$

Ces conditions sont toutes vérifiées lorsque $\boxed{0 \leq \alpha \leq 150}$. Par exemple, pour $\alpha = 75$, on obtient $x = 212{,}5$, $y = 137{,}5$, $z = 75$, $t = 75$.

La directrice marketing peut fixer librement le budget presse α dans l'intervalle obtenu. Chaque millier de MAD supplémentaire en presse augmente le digital de 0,5, diminue la télévision de 0,5 et diminue l'affichage de 1. Si la cible est plutôt âgée et lit la presse, on choisira un α élevé ; si elle est jeune et connectée, un α faible.

Corrigé de l'exercice 13 : Allocation d'un budget d'investissement

Finance d'entreprise

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = montant investi dans le projet 1 (en milliers de MAD) ;

— y = montant investi dans le projet 2 (en milliers de MAD) ;

— z = montant investi dans le projet 3 (en milliers de MAD) ;

— t = montant investi dans le projet 4 (en milliers de MAD) ;

Traduction des contraintes.

— Budget total (5 000 milliers de MAD) : $x + y + z + t = 5000$

— Revenu annuel exigé (395 milliers de MAD) : $0{,}06x + 0{,}08y + 0{,}1z + 0{,}12t = 395$

— Prudence : $x + y = 3(z + t)$: $x + y - 3z - 3t = 0$

On obtient le système de 3 équations à 4 inconnues :

$$\mathcal{S}_{13} : \begin{cases} x + y + z + t = 5000 \\ 0{,}06x + 0{,}08y + 0{,}1z + 0{,}12t = 395 \\ x + y - 3z - 3t = 0 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}1 & 0{,}12 \\ 1 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5000 \\ 395 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}1 & 0{,}12 & 395 \\ 1 & 1 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 0,06 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 la ligne L_1 multipliée par 0,06 (car $0{,}06 - 0{,}06 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}1 & 0{,}12 & 395 \\ 1 & 1 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_2 - 0{,}06L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}06 & 95 \\ 1 & 1 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}06 - 0{,}06 \times 1 = 0$; $0{,}08 - 0{,}06 \times 1 = 0{,}02$; $0{,}1 - 0{,}06 \times 1 = 0{,}04$; $0{,}12 - 0{,}06 \times 1 = 0{,}06$; $395 - 0{,}06 \times 5000 = 95$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}06 & 95 \\ 1 & 1 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}06 & 95 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -5000 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 1 = 0$; $-3 - 1 \times 1 = -4$; $-3 - 1 \times 1 = -4$; $0 - 1 \times 5000 = -5000$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 0,02. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{0{,}02}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{0{,}02}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & \boxed{0{,}02} & 0{,}04 & 0{,}06 & 95 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -5000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_2]{\frac{1}{0{,}02}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4750 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -5000 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{0{,}02} \times 0{,}02 = 1$; $\frac{1}{0{,}02} \times 0{,}04 = 2$; $\frac{1}{0{,}02} \times 0{,}06 = 3$; $\frac{1}{0{,}02} \times 95 = 4750$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Le coefficient de L_3 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -4. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $-\frac{1}{4}$.

Transformation 4. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4750 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -4 & -5000 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{4}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4750 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1250 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{4} \times (-4) = 1$; $-\frac{1}{4} \times (-4) = 1$; $-\frac{1}{4} \times (-5000) = 1250$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 4750 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1250 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 < m = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{13} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 5. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_3 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & \textcircled{2} & 3 & 4750 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1250 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2250 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1250 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $3 - 2 \times 1 = 1$; $4750 - 2 \times 1250 = 2250$.

Transformation 6. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \textcircled{1} & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2250 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1250 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3750 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2250 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1250 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 1 = 0$; $5000 - 1 \times 1250 = 3750$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 7. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 3750 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2250 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1250 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1500 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2250 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1250 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $0 - 1 \times 1 = -1$; $3750 - 1 \times 2250 = 1500$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1500 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 2250 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1250 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1500 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 2250 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1250 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - t = 1500 \\ y + t = 2250 \\ z + t = 1250 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y, z ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : t.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $t = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = 1500 + \alpha \\ y = 2250 - \alpha \\ z = 1250 - \alpha \\ t = \alpha \end{cases}$$

Étape 7 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = 1501$, $y = 2249$, $z = 1249$, $t = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned}
\text{équation 1} &: 1 \times 1501 + 1 \times 2249 + 1 \times 1249 + 1 \times 1 \\
&= 1501 + 2249 + 1249 + 1 = 5000 \ \checkmark \\
\text{équation 2} &: 0{,}06 \times 1501 + 0{,}08 \times 2249 + 0{,}1 \times 1249 + 0{,}12 \times 1 \\
&= 90{,}06 + 179{,}92 + 124{,}9 + 0{,}12 = 395 \ \checkmark \\
\text{équation 3} &: 1 \times 1501 + 1 \times 2249 + (-3) \times 1249 + (-3) \times 1 \\
&= 1501 + 2249 - 3747 - 3 = 0 \ \checkmark
\end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{13}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \left\{ (1500 + \alpha, 2250 - \alpha, 1250 - \alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Étape 8 Interprétation managériale

Toutes les quantités doivent être positives (ou nulles). On écrit cette condition pour chaque inconnue qui dépend du paramètre :

$$\begin{aligned}
x &= 1500 + \alpha \geq 0 \\
y &= 2250 - \alpha \geq 0 \\
z &= 1250 - \alpha \geq 0 \\
t &= \alpha \geq 0
\end{aligned}$$

Ces conditions sont toutes vérifiées lorsque $\boxed{0 \leq \alpha \leq 1250}$. Par exemple, pour $\alpha = 625$, on obtient $x = 2125$, $y = 1625$, $z = 625$, $t = 625$.

Les projets sûrs recevront toujours 3 750 milliers de MAD au total et les projets risqués 1 250. À l'intérieur de chaque groupe, la holding garde une **marge de manœuvre** : chaque millier de MAD placé dans le projet 4 (le plus rentable) au lieu du projet 3 doit être compensé par un millier de MAD placé dans le projet 1 au lieu du projet 2. Le choix de α dépendra de critères non financiers : délais, synergies, image.

Corrigé de l'exercice 14 : Planification des tournées de livraison

Logistique

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = nombre de tournées en petit camion ;

— y = nombre de tournées en camion moyen ;

— z = nombre de tournées en gros camion ;

Traduction des contraintes.

— Tournées longues distances (camions moyens et gros) : $y + z = 14$

— Nombre total de tournées : $x + y + z = 30$

— Tonnage à livrer (132 tonnes) : $2x + 5y + 10z = 132$

— Budget transport (398 centaines de MAD) : $8x + 15y + 25z = 398$

On obtient le système de 4 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_{14} : \begin{cases} y + z = 14 \\ x + y + z = 30 \\ 2x + 5y + 10z = 132 \\ 8x + 15y + 25z = 398 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 10 \\ 8 & 15 & 25 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ 30 \\ 132 \\ 398 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ 2 & 5 & 10 & 132 \\ 8 & 15 & 25 & 398 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_2, située plus bas, a un coefficient non nul (1) dans cette colonne : on échange L_1 et L_2 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ 2 & 5 & 10 & 132 \\ 8 & 15 & 25 & 398 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & 5 & 10 & 132 \\ 8 & 15 & 25 & 398 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ \textcircled{2} & 5 & 10 & 132 \\ 8 & 15 & 25 & 398 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 8 & 72 \\ 8 & 15 & 25 & 398 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $5 - 2 \times 1 = 3$; $10 - 2 \times 1 = 8$; $132 - 2 \times 30 = 72$.

Transformation 3. Pour annuler le 8 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 huit fois la ligne L_1 (car $8 - 8 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 8 & 72 \\ \textcircled{8} & 15 & 25 & 398 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 8L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 8 & 72 \\ 0 & 7 & 17 & 158 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $8 - 8 \times 1 = 0$; $15 - 8 \times 1 = 7$; $25 - 8 \times 1 = 17$; $398 - 8 \times 30 = 158$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 3 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 14 \\ 0 & \textcircled{3} & 8 & 72 \\ 0 & 7 & 17 & 158 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & 30 \\ 0 & 7 & 17 & 158 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $8 - 3 \times 1 = 5$; $72 - 3 \times 14 = 30$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 5. Pour annuler le 7 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 sept fois la ligne L_2 (car $7 - 7 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & 30 \\ 0 & \textcircled{7} & 17 & 158 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 7L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & 30 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $7 - 7 \times 1 = 0$; $17 - 7 \times 1 = 10$; $158 - 7 \times 14 = 60$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 5. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{5}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{5}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 30 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{5}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{5} \times 5 = 1$; $\frac{1}{5} \times 30 = 6$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 7. Pour annuler le 10 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 dix fois la ligne L_3 (car $10 - 10 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 0 & \textcircled{10} & 60 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 10L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $10 - 10 \times 1 = 0$; $60 - 10 \times 6 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_4 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 30 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 14 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{14} \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 8. Pour annuler le 1 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & \textcircled{1} & 14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $14 - 1 \times 6 = 8$.

Transformation 9. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \textcircled{1} & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $30 - 1 \times 6 = 24$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 10. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{1} & 0 & 24 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $24 - 1 \times 8 = 16$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 16 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 16 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 8 \\ z = 6 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

équation 1 : $1 \times 8 + 1 \times 6 = 8 + 6 = 14$ ✓
équation 2 : $1 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 6 = 16 + 8 + 6 = 30$ ✓
équation 3 : $2 \times 16 + 5 \times 8 + 10 \times 6 = 32 + 40 + 60 = 132$ ✓
équation 4 : $8 \times 16 + 15 \times 8 + 25 \times 6 = 128 + 120 + 150 = 398$ ✓

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{14}$ admet une **solution unique** : $x = 16$, $y = 8$, $z = 6$, soit

$$\mathbb{S} = \{(16, 8, 6)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

Le planning est : **16 tournées en petit camion, 8 en camion moyen et 6 en gros camion**. Les quatre contraintes sont satisfaites alors qu'il n'y a que trois inconnues : la ligne nulle montre que l'une d'elles était redondante. Ici, une fois les tournées et le tonnage fixés, le budget de 398 centaines de MAD est automatiquement respecté. Le responsable logistique peut valider ce planning sans dépassement budgétaire.

Corrigé de l'exercice 15 : Mix-produits et politique tarifaire

Gestion commerciale

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = surface vendue en gamme standard (en m^2) ;

— y = surface vendue en gamme premium (en m^2) ;

— z = surface vendue en gamme luxe (en m^2) ;

Traduction des contraintes.

— Surface totale vendue (1 000 m^2) : $x + y + z = 1000$

— Marge sur coût variable (29 000 MAD) : $20x + 30y + 50z = 29\,000$

— Chiffre d'affaires (73 000 MAD) : $50x + 80y + 120z = 73\,000$

— Gamme luxe = 20 % du total : $z = 0{,}2(x + y + z)$: $-0{,}2x - 0{,}2y + 0{,}8z = 0$

On obtient le système de 4 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_{15} : \begin{cases} x + y + z = 1000 \\ 20x + 30y + 50z = 29\,000 \\ 50x + 80y + 120z = 73\,000 \\ -0{,}2x - 0{,}2y + 0{,}8z = 0 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 20 & 30 & 50 \\ 50 & 80 & 120 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1000 \\ 29\,000 \\ 73\,000 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 20 & 30 & 50 & 29\,000 \\ 50 & 80 & 120 & 73\,000 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 & 0 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 20 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 la ligne L_1 multipliée par 20 (car $20 - 20 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1000 \\ \textcircled{20} & 30 & 50 & 29\,000 \\ 50 & 80 & 120 & 73\,000 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_2 - 20L_1} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 10 & 30 & 9000 \\ 50 & 80 & 120 & 73\,000 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $20 - 20 \times 1 = 0$; $30 - 20 \times 1 = 10$; $50 - 20 \times 1 = 30$; $29\,000 - 20 \times 1000 = 9000$.

Transformation 2. Pour annuler le 50 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_1 multipliée par 50 (car $50 - 50 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 10 & 30 & 9000 \\ \textcircled{50} & 80 & 120 & 73\,000 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_3 - 50L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 10 & 30 & 9000 \\ 0 & 30 & 70 & 23\,000 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $50 - 50 \times 1 = 0$; $80 - 50 \times 1 = 30$; $120 - 50 \times 1 = 70$; $73\,000 - 50 \times 1000 = 23\,000$.

Transformation 3. Pour annuler le $-0{,}2$ de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 la ligne L_1 multipliée par 0,2 (car $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 10 & 30 & 9000 \\ 0 & 30 & 70 & 23\,000 \\ \textcircled{-0{,}2} & -0{,}2 & 0{,}8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 + 0{,}2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 10 & 30 & 9000 \\ 0 & 30 & 70 & 23\,000 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$; $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$; $0{,}8 + 0{,}2 \times 1 = 1$; $0 + 0{,}2 \times 1000 = 200$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 10. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{10}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{10}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & \boxed{10} & 30 & 9000 \\ 0 & 30 & 70 & 23\,000 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{10}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 3 & 900 \\ 0 & 30 & 70 & 23\,000 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{10} \times 10 = 1$; $\frac{1}{10} \times 30 = 3$; $\frac{1}{10} \times 9000 = 900$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le 30 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_2 multipliée par 30 (car $30 - 30 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 900 \\ 0 & \textcircled{30} & 70 & 23\,000 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 30L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 3 & 900 \\ 0 & 0 & -20 & -4000 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $30 - 30 \times 1 = 0$; $70 - 30 \times 3 = -20$; $23\,000 - 30 \times 900 = -4000$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Le coefficient de L_4 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -20. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $-\frac{1}{20}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{20}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 3 & 900 \\ 0 & 0 & \boxed{-20} & -4000 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{20}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 3 & 900 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{20} \times (-20) = 1$; $-\frac{1}{20} \times (-4000) = 200$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 7. Pour annuler le 1 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 3 & 900 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 200 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 200 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 3 & 900 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $200 - 1 \times 200 = 0$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_4 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 900 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\text{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{15} \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 8. Pour annuler le 3 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 trois fois la ligne L_3 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & \textcircled{3} & 900 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 3L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $900 - 3 \times 200 = 300$.

Transformation 9. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \textcircled{1} & 1000 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1000 - 1 \times 200 = 800$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 10. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{1} & 0 & 800 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $800 - 1 \times 300 = 500$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 500 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 300 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 500 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 300 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 500 \\ y = 300 \\ z = 200 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\text{équation 1} : 1 \times 500 + 1 \times 300 + 1 \times 200 = 500 + 300 + 200 = 1000 \checkmark$$
$$\text{équation 2} : 20 \times 500 + 30 \times 300 + 50 \times 200 = 10\,000 + 9000 + 10\,000 = 29\,000 \checkmark$$
$$\text{équation 3} : 50 \times 500 + 80 \times 300 + 120 \times 200 = 25\,000 + 24\,000 + 24\,000 = 73\,000 \checkmark$$
$$\text{équation 4} : (-0{,}2) \times 500 + (-0{,}2) \times 300 + 0{,}8 \times 200 = -100 - 60 + 160 = 0 \checkmark$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{15}$ admet une **solution unique** : $x = 500$, $y = 300$, $z = 200$, soit

$$\mathbb{S} = \{(500, 300, 200)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

Les objectifs sont cohérents : il faut vendre **500 m^2 en standard, 300 m^2 en premium et 200 m^2 en luxe**. Avec quatre objectifs pour trois inconnues, l'un d'eux est redondant (ligne nulle) : ici, la contrainte sur la gamme luxe découle des trois autres. Le prix moyen de vente est de 73 MAD par m^2 et le taux de marge sur coût variable de $29\,000/73\,000 \approx 39{,}7\,\%$.

Corrigé de l'exercice 16 : Constitution d'un stock dans un entrepôt

Gestion des stocks

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = nombre de palettes de catégorie A ;

— y = nombre de palettes de catégorie B ;

— z = nombre de palettes de catégorie C ;

Traduction des contraintes.

— Nombre de palettes : $x + y + z = 100$

— Valeur du stock (290 milliers de MAD) : $2x + 3y + 5z = 290$

— Surface occupée (135 m^2) : $x + 1{,}5y + 2z = 135$

— Poids total (80 tonnes) : $0{,}5x + 0{,}8y + 1{,}2z = 80$

On obtient le système de 4 équations à 3 inconnues :

$$\mathcal{S}_{16} : \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2x + 3y + 5z = 290 \\ x + 1{,}5y + 2z = 135 \\ 0{,}5x + 0{,}8y + 1{,}2z = 80 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}8 & 1{,}2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 290 \\ 135 \\ 80 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 2 & 3 & 5 & 290 \\ 1 & 1{,}5 & 2 & 135 \\ 0{,}5 & 0{,}8 & 1{,}2 & 80 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 2 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 100 \\ \textcircled{2} & 3 & 5 & 290 \\ 1 & 1{,}5 & 2 & 135 \\ 0{,}5 & 0{,}8 & 1{,}2 & 80 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 90 \\ 1 & 1{,}5 & 2 & 135 \\ 0{,}5 & 0{,}8 & 1{,}2 & 80 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $3 - 2 \times 1 = 1$; $5 - 2 \times 1 = 3$; $290 - 2 \times 100 = 90$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & & 100 \\ 0 & 1 & 3 & & 90 \\ (1) & 1{,}5 & 2 & & 135 \\ 0{,}5 & 0{,}8 & 1{,}2 & & 80 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & & 100 \\ 0 & 1 & 3 & & 90 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & & 35 \\ 0{,}5 & 0{,}8 & 1{,}2 & & 80 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1{,}5 - 1 \times 1 = 0{,}5$; $2 - 1 \times 1 = 1$; $135 - 1 \times 100 = 35$.

Transformation 3. Pour annuler le 0,5 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 la ligne L_1 multipliée par 0,5 (car $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & & 100 \\ 0 & 1 & 3 & & 90 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & & 35 \\ (0{,}5) & 0{,}8 & 1{,}2 & & 80 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 0{,}5L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & & 100 \\ 0 & 1 & 3 & & 90 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & & 35 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & & 30 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$; $0{,}8 - 0{,}5 \times 1 = 0{,}3$; $1{,}2 - 0{,}5 \times 1 = 0{,}7$; $80 - 0{,}5 \times 100 = 30$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le 0,5 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_2 multipliée par 0,5 (car $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & & 100 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & & 90 \\ 0 & (0{,}5) & 1 & & 35 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 0{,}5L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & & 100 \\ 0 & 1 & 3 & & 90 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & & -10 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & & 30 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$; $1 - 0{,}5 \times 3 = -0{,}5$; $35 - 0{,}5 \times 90 = -10$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 5. Pour annuler le 0,3 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 la ligne L_2 multipliée par 0,3 (car $0{,}3 - 0{,}3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & & 100 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & & 90 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & & -10 \\ 0 & (0{,}3) & 0{,}7 & & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 0{,}3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & & 100 \\ 0 & 1 & 3 & & 90 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & & -10 \\ 0 & 0 & -0{,}2 & & 3 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}3 - 0{,}3 \times 1 = 0$; $0{,}7 - 0{,}3 \times 3 = -0{,}2$; $30 - 0{,}3 \times 90 = 3$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut $-0{,}5$. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $-\frac{1}{0{,}5}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{0{,}5}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 90 \\ 0 & 0 & \boxed{-0{,}5} & -10 \\ 0 & 0 & -0{,}2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{0{,}5}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -0{,}2 & 3 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{0{,}5} \times (-0{,}5) = 1$; $-\frac{1}{0{,}5} \times (-10) = 20$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 7. Pour annuler le $-0{,}2$ de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 la ligne L_3 multipliée par 0,2 (car $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 90 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 20 \\ 0 & 0 & \textcircled{-0{,}2} & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 + 0{,}2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$; $3 + 0{,}2 \times 20 = 7$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Colonne des constantes. Toutes les colonnes de A sont traitées. À gauche de la barre, les lignes restantes ne contiennent plus que des zéros, mais leur second membre n'est pas nul : chacune traduit une **équation impossible**. On fait apparaître un pivot dans la colonne des constantes (et des zéros sous lui) pour lire correctement le rang de $A|B$. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne des constantes (à droite de la barre) : il vaut 7. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_4 par $\frac{1}{7}$.

Transformation 8. Multiplication de L_4 par $\frac{1}{7}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{7}L_4} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{7} \times 7 = 1$.

La colonne des constantes est traitée.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 100 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 90 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 20 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 4, donc $\text{rang}(A|B) = 4$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\text{rang}(A) = 3$.

$$\text{rang}(A) = 3 \neq \text{rang}(A|B) = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{16} \text{ est incompatible.}$$

En effet, la ligne L_4 de $A_e|B_e$ est de la forme $(0 \cdots 0 \mid 1)$: elle traduit l'équation

$$0x + 0y + 0z = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 = 1,$$

ce qui est **impossible**. Aucune valeur des inconnues ne peut vérifier cette équation : il est donc inutile de poursuivre avec la remontée.

Le système $\mathcal{S}_{16}$ est incompatible :

$$\mathrm{S} = \emptyset.$$

Étape 5 Interprétation managériale

Le cahier des charges est irréalisable. Les trois premières contraintes (nombre, valeur, surface) imposent à elles seules 50 palettes A, 30 palettes B et 20 palettes C (on le vérifie en résolvant le système formé de ces trois seules contraintes), ce qui représente un poids de $0{,}5 \times 50 + 0{,}8 \times 30 + 1{,}2 \times 20 = 73$ tonnes, et non 80. Le responsable doit donc renégocier une des exigences : par exemple, ramener le contrat de transport à 73 tonnes.

Corrigé de l'exercice 17 : Répartition secondaire entre quatre centres auxiliaires

Comptabilité de gestion

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = coût total du centre Entretien (en milliers de MAD) ;

— y = coût total du centre Énergie (en milliers de MAD) ;

— z = coût total du centre Administration (en milliers de MAD) ;

— t = coût total du centre Transport (en milliers de MAD) ;

Traduction des contraintes. Comme pour l'exercice 3, le coût total de chaque centre est égal à ses charges primaires augmentées des prestations reçues ; on fait passer toutes les inconnues à gauche.

— Entretien : $x = 66 + 0{,}2z + 0{,}2t$: $\quad x - 0{,}2z - 0{,}2t = 66$

— Énergie : $y = 51 + 0{,}2z + 0{,}1t$: $\quad y - 0{,}2z - 0{,}1t = 51$

— Administration : $z = 69 + 0{,}3x + 0{,}2y + 0{,}1t$: $\quad -0{,}3x - 0{,}2y + z - 0{,}1t = 69$

— Transport : $t = 38 + 0{,}1z$: $\quad -0{,}1z + t = 38$

On obtient le système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\mathcal{S}_{17} : \begin{cases} x - 0{,}2z - 0{,}2t = 66 \\ y - 0{,}2z - 0{,}1t = 51 \\ -0{,}3x - 0{,}2y + z - 0{,}1t = 69 \\ -0{,}1z + t = 38 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 1 ; x n'apparaît pas dans l'équation 2 ; x et y n'apparaissent pas dans l'équation 4 : les coefficients correspondants valent 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & -0{,}2 & 1 & -0{,}1 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 66 \\ 51 \\ 69 \\ 38 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ -0{,}3 & -0{,}2 & 1 & -0{,}1 & 69 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & 1 & 38 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 1. Pour annuler le $-0{,}3$ de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 la ligne L_1 multipliée par 0,3 (car $-0{,}3 + 0{,}3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ -0{,}3 & -0{,}2 & 1 & -0{,}1 & 69 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & 1 & 38 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_3 + 0{,}3L_1} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}94 & -0{,}16 & 88{,}8 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & 1 & 38 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}3+0{,}3\times 1=0$; $-0{,}2+0{,}3\times 0=-0{,}2$; $1+0{,}3\times(-0{,}2)=0{,}94$; $-0{,}1+0{,}3\times(-0{,}2)=-0{,}16$; $69+0{,}3\times 66=88{,}8$.

Le coefficient de L_4 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 2. Pour annuler le $-0{,}2$ de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 la ligne L_2 multipliée par 0,2 (car $-0{,}2+0{,}2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & \boxed{1} & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}94 & -0{,}16 & 88{,}8 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & 1 & 38 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_3+0{,}2L_2} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & -0{,}18 & 99 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & 1 & 38 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}2+0{,}2\times 1=0$; $0{,}94+0{,}2\times(-0{,}2)=0{,}9$; $-0{,}16+0{,}2\times(-0{,}1)=-0{,}18$; $88{,}8+0{,}2\times 51=99$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Le coefficient de L_4 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 0,9. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{0{,}9}$.

Transformation 3. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{0{,}9}$.

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & 0 & \boxed{0{,}9} & -0{,}18 & 99 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & 1 & 38 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{0{,}9}L_3} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 & 110 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & 1 & 38 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{0{,}9}\times 0{,}9=1$; $\frac{1}{0{,}9}\times(-0{,}18)=-0{,}2$; $\frac{1}{0{,}9}\times 99=110$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 4. Pour annuler le $-0{,}1$ de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 la ligne L_3 multipliée par 0,1 (car $-0{,}1 + 0{,}1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -0{,}2 & 110 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & 1 & 38 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 + 0{,}1L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}98 & 49 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}1 + 0{,}1 \times 1 = 0$; $1 + 0{,}1 \times (-0{,}2) = 0{,}98$; $38 + 0{,}1 \times 110 = 49$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 4. On cherche le pivot sur la ligne L_4. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne 4 (coefficients de t) : il vaut 0,98. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_4 par $\frac{1}{0{,}98}$.

Transformation 5. Multiplication de L_4 par $\frac{1}{0{,}98}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0{,}98} & 49 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{0{,}98}L_4} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{0{,}98} \times 0{,}98 = 1$; $\frac{1}{0{,}98} \times 49 = 50$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & \mathbf{1} & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -0{,}2 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 50 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 4, donc $\text{rang}(A|B) = 4$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 4, donc $\text{rang}(A) = 4$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 4 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{17} \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_4, colonne 4. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 6. Pour annuler le $-0{,}2$ de L_3 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_3 la ligne L_4 multipliée par 0,2 (car $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 0{,}2L_4} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$; $110 + 0{,}2 \times 50 = 120$.

Transformation 7. Pour annuler le $-0{,}1$ de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 la ligne L_4 multipliée par 0,1 (car $-0{,}1 + 0{,}1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 0{,}1L_4} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}1 + 0{,}1 \times 1 = 0$; $51 + 0{,}1 \times 50 = 56$.

Transformation 8. Pour annuler le $-0{,}2$ de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 la ligne L_4 multipliée par 0,2 (car $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 66 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + 0{,}2L_4} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & 0 & 76 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$; $66 + 0{,}2 \times 50 = 76$.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 9. Pour annuler le $-0{,}2$ de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 la ligne L_3 multipliée par 0,2 (car $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & 0 & 76 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 0{,}2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & 0 & 76 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$; $0 + 0{,}2 \times 0 = 0$; $56 + 0{,}2 \times 120 = 80$.

Transformation 10. Pour annuler le $-0{,}2$ de L_1 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_1 la ligne L_3 multipliée par 0,2 (car $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0{,}2 & 0 & 76 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 + 0{,}2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}2 + 0{,}2 \times 1 = 0$; $0 + 0{,}2 \times 0 = 0$; $76 + 0{,}2 \times 120 = 100$.

Pivot de L_2, colonne 2. Au-dessus de ce pivot, les coefficients sont déjà nuls : rien à faire.

Le coefficient de L_1 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 50 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 50 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 80 \\ z = 120 \\ t = 50 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1 : } 1 \times 100 + (-0{,}2) \times 120 + (-0{,}2) \times 50 = 100 - 24 - 10 = 66 \ \checkmark \\ &\text{équation 2 : } 1 \times 80 + (-0{,}2) \times 120 + (-0{,}1) \times 50 = 80 - 24 - 5 = 51 \ \checkmark \\ &\text{équation 3 : } (-0{,}3) \times 100 + (-0{,}2) \times 80 + 1 \times 120 + (-0{,}1) \times 50 \\ &\qquad = -30 - 16 + 120 - 5 = 69 \ \checkmark \\ &\text{équation 4 : } (-0{,}1) \times 120 + 1 \times 50 = -12 + 50 = 38 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{17}$ admet une **solution unique** : $x = 100$, $y = 80$, $z = 120$, $t = 50$, soit

$$\mathbb{S} = \{(100, 80, 120, 50)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

Les coûts totaux sont : **100 milliers de MAD pour l'Entretien, 80 pour l'Énergie, 120 pour l'Administration et 50 pour le Transport**. Le total des charges primaires (224) est inférieur à la somme des coûts totaux (350) : la différence correspond aux prestations échangées entre centres auxiliaires, qui seront annulées lors de la répartition vers les centres principaux. Avec quatre centres, le calcul manuel devient déjà long : c'est typiquement le genre de calcul que l'on confie à un logiciel (voir la Partie 3).

Corrigé de l'exercice 18 : Programme de production d'une laiterie

Production agroalimentaire

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = nombre de lots de yaourts ;

— y = nombre de lots de lben ;

— z = nombre de lots de fromage frais ;

— t = nombre de lots de beurre ;

Traduction des contraintes.

— Pasteurisation haute température (70 h) : $2y + z + 3t = 70$

— Main-d'œuvre (75 h) : $x + 2y + z + 2t = 75$

— Lait (90 centaines de litres) : $2x + y + 3z + t = 90$

— Chambre froide (50 palettes) : $x + y + z + t = 50$

On obtient le système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\mathcal{S}_{18} : \begin{cases} 2y + z + 3t = 70 \\ x + 2y + z + 2t = 75 \\ 2x + y + 3z + t = 90 \\ x + y + z + t = 50 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x n'apparaît pas dans l'équation 1 : le coefficient correspondant vaut 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 70 \\ 75 \\ 90 \\ 50 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 & 70 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 90 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. La ligne L_2, située plus bas, a un coefficient non nul (1) dans cette colonne : on échange L_1 et L_2 (cela revient à changer l'ordre des équations).

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 & 70 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 90 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 70 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 90 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

Normalisation. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 70 \\ \textcircled{2} & 1 & 3 & 1 & 90 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 70 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -60 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $1 - 2 \times 2 = -3$; $3 - 2 \times 1 = 1$; $1 - 2 \times 2 = -3$; $90 - 2 \times 75 = -60$.

Transformation 3. Pour annuler le 1 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 70 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -60 \\ \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 70 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -60 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -25 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 2 = -1$; $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 2 = -1$; $50 - 1 \times 75 = -25$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut 2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 3 & 70 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -60 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -25 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 35 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -60 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -25 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 1 = 0{,}5$; $\frac{1}{2} \times 3 = 1{,}5$; $\frac{1}{2} \times 70 = 35$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le -3 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $-3 + 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & \boxed{1} & 0{,}5 & 1{,}5 & 35 \\ 0 & \textcircled{-3} & 1 & -3 & -60 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -25 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + 3L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 35 \\ 0 & 0 & 2{,}5 & 1{,}5 & 45 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -25 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3 + 3 \times 1 = 0$; $1 + 3 \times 0{,}5 = 2{,}5$; $-3 + 3 \times 1{,}5 = 1{,}5$; $-60 + 3 \times 35 = 45$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 6. Pour annuler le -1 de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_2 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & \boxed{1} & 0{,}5 & 1{,}5 & 35 \\ 0 & 0 & 2{,}5 & 1{,}5 & 45 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & -1 & -25 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 + L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 35 \\ 0 & 0 & 2{,}5 & 1{,}5 & 45 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $0 + 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$; $-1 + 1 \times 1{,}5 = 0{,}5$; $-25 + 1 \times 35 = 10$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut 2,5. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $\frac{1}{2{,}5}$.

Transformation 7. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2,5}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1,5 & 35 \\ 0 & 0 & \boxed{2,5} & 1,5 & 45 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2,5}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1,5 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 0,6 & 18 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{2,5} \times 2,5 = 1$; $\frac{1}{2,5} \times 1,5 = 0,6$; $\frac{1}{2,5} \times 45 = 18$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 8. Pour annuler le 0,5 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 la ligne L_3 multipliée par 0,5 (car $0,5 - 0,5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1,5 & 35 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0,6 & 18 \\ 0 & 0 & \textcircled{0,5} & 0,5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 0,5L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1,5 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 0,6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0,5 - 0,5 \times 1 = 0$; $0,5 - 0,5 \times 0,6 = 0,2$; $10 - 0,5 \times 18 = 1$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 4. On cherche le pivot sur la ligne L_4. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne 4 (coefficients de t) : il vaut 0,2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_4 par $\frac{1}{0,2}$.

Transformation 9. Multiplication de L_4 par $\frac{1}{0,2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1,5 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 0,6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0,2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{0,2}L_4} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1,5 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 0,6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{0,2} \times 0,2 = 1$; $\frac{1}{0,2} \times 1 = 5$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & \mathbf{1} & 0,5 & 1,5 & 35 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0,6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 4, donc $\text{rang}(A|B) = 4$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 4, donc $\text{rang}(A) = 4$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 4 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{18} \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_4, colonne 4. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 10. Pour annuler le 0,6 de L_3 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_4 multipliée par 0,6 (car $0{,}6 - 0{,}6 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - 0{,}6L_4} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}6 - 0{,}6 \times 1 = 0$; $18 - 0{,}6 \times 5 = 15$.

Transformation 11. Pour annuler le 1,5 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 la ligne L_4 multipliée par 1,5 (car $1{,}5 - 1{,}5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 1{,}5L_4} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0 & 27{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1{,}5 - 1{,}5 \times 1 = 0$; $35 - 1{,}5 \times 5 = 27{,}5$.

Transformation 12. Pour annuler le 2 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 deux fois la ligne L_4 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 75 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0 & 27{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 2L_4} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 65 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0 & 27{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $75 - 2 \times 5 = 65$.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 13. Pour annuler le 0,5 de L_2 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_2 la ligne L_3 multipliée par 0,5 (car $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 65 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0 & 27{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 0{,}5L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 65 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $0{,}5 - 0{,}5 \times 1 = 0$; $0 - 0{,}5 \times 0 = 0$; $27{,}5 - 0{,}5 \times 15 = 20$.

Transformation 14. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 65 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $65 - 1 \times 15 = 50$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 15. Pour annuler le 2 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 deux fois la ligne L_2 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $2 - 2 \times 1 = 0$; $0 - 2 \times 0 = 0$; $0 - 2 \times 0 = 0$; $50 - 2 \times 20 = 10$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 15 \\ t = 5 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : 2 \times 20 + 1 \times 15 + 3 \times 5 = 40 + 15 + 15 = 70 \ \checkmark \\ &\text{équation 2} : 1 \times 10 + 2 \times 20 + 1 \times 15 + 2 \times 5 \\ &\qquad = 10 + 40 + 15 + 10 = 75 \ \checkmark \\ &\text{équation 3} : 2 \times 10 + 1 \times 20 + 3 \times 15 + 1 \times 5 \\ &\qquad = 20 + 20 + 45 + 5 = 90 \ \checkmark \\ &\text{équation 4} : 1 \times 10 + 1 \times 20 + 1 \times 15 + 1 \times 5 \\ &\qquad = 10 + 20 + 15 + 5 = 50 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{18}$ admet une **solution unique** : $x = 10$, $y = 20$, $z = 15$, $t = 5$, soit

$$\mathbb{S} = \{(10, 20, 15, 5)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

La laiterie doit produire **10 lots de yaourts, 20 lots de lben, 15 lots de fromage frais et 5 lots de beurre**. Toutes les quantités sont positives et entières : le programme est réalisable et sature les quatre ressources. Le lben, produit traditionnel très demandé, représente 40 % des lots. Le pivot nul de départ (les yaourts n'utilisent pas la pasteurisation) a été traité par une simple permutation de lignes.

Corrigé de l'exercice 19 : Planification des effectifs d'une nouvelle usine

Ressources humaines

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = nombre d'ouvriers ;

— y = nombre de techniciens ;

— z = nombre d'ingénieurs ;

— t = nombre de cadres ;

Traduction des contraintes.

— Masse salariale mensuelle (630 milliers de MAD) : $4x + 6y + 12z + 15t = 630$

— Deux techniciens par ingénieur : $y = 2z$: $y - 2z = 0$

— Un cadre pour neuf salariés : $x + y + z = 9t$: $x + y + z - 9t = 0$

— Effectif total (100 personnes) : $x + y + z + t = 100$

On obtient le système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\mathcal{S}_{19} : \begin{cases} 4x + 6y + 12z + 15t = 630 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + z - 9t = 0 \\ x + y + z + t = 100 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : x et t n'apparaissent pas dans l'équation 2 : les coefficients correspondants valent 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 630 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 12 & 15 & 630 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut 4. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_1 par $\frac{1}{4}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{4} & 6 & 12 & 15 & 630 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{4}L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{4} \times 4 = 1$; $\frac{1}{4} \times 6 = 1{,}5$; $\frac{1}{4} \times 12 = 3$; $\frac{1}{4} \times 15 = 3{,}75$; $\frac{1}{4} \times 630 = 157{,}5$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 1 & 1 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -2 & -12{,}75 & -157{,}5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 1{,}5 = -0{,}5$; $1 - 1 \times 3 = -2$; $-9 - 1 \times 3{,}75 = -12{,}75$; $0 - 1 \times 157{,}5 = -157{,}5$.

Transformation 3. Pour annuler le 1 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -2 & -12{,}75 & -157{,}5 \\ \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_4 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -2 & -12{,}75 & -157{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -2 & -2{,}75 & -57{,}5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1-1\times 1=0$; $1-1\times 1{,}5=-0{,}5$; $1-1\times 3=-2$; $1-1\times 3{,}75=-2{,}75$; $100-1\times 157{,}5=-57{,}5$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 4. Pour annuler le $-0{,}5$ de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 la ligne L_2 multipliée par 0,5 (car $-0{,}5+0{,}5\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -2 & -12{,}75 & -157{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -2 & -2{,}75 & -57{,}5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_3+0{,}5L_2} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -12{,}75 & -157{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -2 & -2{,}75 & -57{,}5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}5+0{,}5\times 1=0$; $-2+0{,}5\times(-2)=-3$; $-12{,}75+0{,}5\times 0=-12{,}75$; $-157{,}5+0{,}5\times 0=-157{,}5$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 5. Pour annuler le $-0{,}5$ de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 la ligne L_2 multipliée par 0,5 (car $-0{,}5+0{,}5\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -12{,}75 & -157{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -2 & -2{,}75 & -57{,}5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_4+0{,}5L_2} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -12{,}75 & -157{,}5 \\ 0 & 0 & -3 & -2{,}75 & -57{,}5 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-0{,}5+0{,}5\times 1=0$; $-2+0{,}5\times(-2)=-3$; $-2{,}75+0{,}5\times 0=-2{,}75$; $-57{,}5+0{,}5\times 0=-57{,}5$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -3. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $-\frac{1}{3}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -12{,}75 & -157{,}5 \\ 0 & 0 & -3 & -2{,}75 & -57{,}5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{3}L_3} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}25 & 52{,}5 \\ 0 & 0 & -3 & -2{,}75 & -57{,}5 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{3} \times (-3) = 1$; $-\frac{1}{3} \times (-12{,}75) = 4{,}25$; $-\frac{1}{3} \times (-157{,}5) = 52{,}5$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Transformation 7. Pour annuler le -3 de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 trois fois la ligne L_3 (car $-3 + 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4{,}25 & 52{,}5 \\ 0 & 0 & \textcircled{-3} & -2{,}75 & -57{,}5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_4 + 3L_3} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}25 & 52{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 100 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-3 + 3 \times 1 = 0$; $-2{,}75 + 3 \times 4{,}25 = 10$; $-57{,}5 + 3 \times 52{,}5 = 100$.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 4. On cherche le pivot sur la ligne L_4. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne 4 (coefficients de t) : il vaut 10. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_4 par $\frac{1}{10}$.

Transformation 8. Multiplication de L_4 par $\frac{1}{10}$.

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}25 & 52{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{10} & 100 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_2]{\frac{1}{10}L_4} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}25 & 52{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $\frac{1}{10} \times 10 = 1$; $\frac{1}{10} \times 100 = 10$.

Fin de la descente. La matrice est maintenant échelonnée.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4{,}25 & 52{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 10 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 4, donc $\text{rang}(A|B) = 4$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 4, donc $\text{rang}(A) = 4$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 4 = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{19} \text{ est compatible déterminé :}$$

il admet une **solution unique**, que la remontée va faire apparaître.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_4, colonne 4. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 9. Pour annuler le 4,25 de L_3 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_3 la ligne L_4 multipliée par 4,25 (car $4{,}25 - 4{,}25 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}25 & 52{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[O_3]{L_3 - 4{,}25L_4} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $4{,}25 - 4{,}25 \times 1 = 0$; $52{,}5 - 4{,}25 \times 10 = 10$.

Le coefficient de L_2 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Transformation 10. Pour annuler le 3,75 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 la ligne L_4 multipliée par 3,75 (car $3{,}75 - 3{,}75 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 3{,}75 & 157{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 3{,}75L_4} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3{,}75 - 3{,}75 \times 1 = 0$; $157{,}5 - 3{,}75 \times 10 = 120$.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 11. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_3 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 2L_3} \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $0 + 2 \times 0 = 0$; $0 + 2 \times 10 = 20$.

Transformation 12. Pour annuler le 3 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 trois fois la ligne L_3 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 3 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 3L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $3 - 3 \times 1 = 0$; $0 - 3 \times 0 = 0$; $120 - 3 \times 10 = 90$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 13. Pour annuler le 1,5 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 la ligne L_2 multipliée par 1,5 (car $1{,}5 - 1{,}5 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - 1{,}5L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1{,}5 - 1{,}5 \times 1 = 0$; $0 - 1{,}5 \times 0 = 0$; $0 - 1{,}5 \times 0 = 0$; $90 - 1{,}5 \times 20 = 60$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 10 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 10 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 20 \\ z = 10 \\ t = 10 \end{cases}$$

Chaque équation donne directement la valeur d'une inconnue.

Étape 7 Vérification

On remplace les inconnues par les valeurs trouvées dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} \text{équation 1} &: 4 \times 60 + 6 \times 20 + 12 \times 10 + 15 \times 10 \\ &= 240 + 120 + 120 + 150 = 630 \ \checkmark \\ \text{équation 2} &: 1 \times 20 + (-2) \times 10 = 20 - 20 = 0 \ \checkmark \\ \text{équation 3} &: 1 \times 60 + 1 \times 20 + 1 \times 10 + (-9) \times 10 \\ &= 60 + 20 + 10 - 90 = 0 \ \checkmark \\ \text{équation 4} &: 1 \times 60 + 1 \times 20 + 1 \times 10 + 1 \times 10 \\ &= 60 + 20 + 10 + 10 = 100 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{19}$ admet une **solution unique** : $x = 60$, $y = 20$, $z = 10$, $t = 10$, soit

$$\mathbb{S} = \{(60, 20, 10, 10)\}.$$

Étape 8 Interprétation managériale

La DRH doit recruter **60 ouvriers, 20 techniciens, 10 ingénieurs et 10 cadres**. Les effectifs sont entiers et positifs : le plan de recrutement est réalisable. La masse salariale de 630 milliers de MAD est entièrement utilisée, ce qui donne un salaire moyen de 6,3 milliers de MAD par mois. C'est ce système que nous résoudrons avec MATLAB dans la Partie 3.

Corrigé de l'exercice 20 : Composition d'un fil textile

Production textile (mélange)

Étape 1 Modélisation managériale

Choix des inconnues.

— x = quantité de coton (en kg) ;

— y = quantité de polyester (en kg) ;

— z = quantité de lin (en kg) ;

— t = quantité de laine (en kg) ;

Traduction des contraintes.

— Poids du lot (100 kg) : $x + y + z + t = 100$

— Coût matière (3 600 MAD) : $30x + 20y + 50z + 80t = 3600$

— Fibres naturelles (70 kg) : $x + z + t = 70$

— Surcoût par rapport au polyester (1 600 MAD) : $10x + 30z + 60t = 1600$

On obtient le système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\mathcal{S}_{20} : \begin{cases} x + y + z + t = 100 \\ 30x + 20y + 50z + 80t = 3600 \\ x + z + t = 70 \\ 10x + 30z + 60t = 1600 \end{cases}$$

Étape 2 Forme matricielle $AX = B$ et matrice augmentée $A|B$

Précaution. Les inconnues apparaissent bien dans le même ordre (x, y, z, t) dans toutes les équations : on peut lire les coefficients ligne par ligne, et le vecteur X accueille les inconnues dans ce même ordre. Attention aux inconnues absentes : y n'apparaît pas dans l'équation 3 ; y n'apparaît pas dans l'équation 4 : les coefficients correspondants valent 0 dans la matrice A.

On range les coefficients des inconnues dans la matrice A, les inconnues dans le vecteur X et les seconds membres dans le vecteur B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 30 & 20 & 50 & 80 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 30 & 60 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 3600 \\ 70 \\ 1600 \end{pmatrix}}_{B}$$

On joint ensuite B à droite de A, séparé par une barre verticale :

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 30 & 20 & 50 & 80 & 3600 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 70 \\ 10 & 0 & 30 & 60 & 1600 \end{array}\right)$$

Étape 3 Descente : algorithme de Gauss

On descend colonne par colonne, de gauche à droite : on **ramène chaque pivot à** 1, puis on fait apparaître des **zéros au-dessous** de lui. Chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris.

Colonne 1. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 (coefficients de x) : il vaut déjà 1, aucune multiplication n'est nécessaire.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_1, dans la colonne 1 (coefficients de x).

Transformation 1. Pour annuler le 30 de L_2 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_2 la ligne L_1 multipliée par 30 (car $30 - 30 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 100 \\ \textcircled{30} & 20 & 50 & 80 & 3600 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 70 \\ 10 & 0 & 30 & 60 & 1600 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 - 30L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -10 & 20 & 50 & 600 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 70 \\ 10 & 0 & 30 & 60 & 1600 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $30 - 30 \times 1 = 0$; $20 - 30 \times 1 = -10$; $50 - 30 \times 1 = 20$; $80 - 30 \times 1 = 50$; $3600 - 30 \times 100 = 600$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -10 & 20 & 50 & 600 \\ \textcircled{1} & 0 & 1 & 1 & 70 \\ 10 & 0 & 30 & 60 & 1600 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -10 & 20 & 50 & 600 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -30 \\ 10 & 0 & 30 & 60 & 1600 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 1 = -1$; $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 1 = 0$; $70 - 1 \times 100 = -30$.

Transformation 3. Pour annuler le 10 de L_4 (au-dessous du pivot), on retranche à la ligne L_4 dix fois la ligne L_1 (car $10 - 10 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -10 & 20 & 50 & 600 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -30 \\ \textcircled{10} & 0 & 30 & 60 & 1600 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 - 10L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -10 & 20 & 50 & 600 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & -10 & 20 & 50 & 600 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $10 - 10 \times 1 = 0$; $0 - 10 \times 1 = -10$; $30 - 10 \times 1 = 20$; $60 - 10 \times 1 = 50$; $1600 - 10 \times 100 = 600$.

Sous le pivot de la colonne 1, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 2. On cherche le pivot sur la ligne L_2. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 (coefficients de y) : il vaut -10. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_2 par $-\frac{1}{10}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{10}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & \boxed{-10} & 20 & 50 & 600 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & -10 & 20 & 50 & 600 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{10}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -60 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & -10 & 20 & 50 & 600 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{10} \times (-10) = 1$; $-\frac{1}{10} \times 20 = -2$; $-\frac{1}{10} \times 50 = -5$; $-\frac{1}{10} \times 600 = -60$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_2, dans la colonne 2 (coefficients de y).

Transformation 5. Pour annuler le -1 de L_3 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -5 & -60 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & 0 & -30 \\ 0 & -10 & 20 & 50 & 600 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_3 + L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -60 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -90 \\ 0 & -10 & 20 & 50 & 600 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $0 + 1 \times (-2) = -2$; $0 + 1 \times (-5) = -5$; $-30 + 1 \times (-60) = -90$. (Dans les colonnes des pivots précédents, la ligne du pivot a des zéros : ces colonnes ne sont donc pas modifiées.)

Transformation 6. Pour annuler le -10 de L_4 (au-dessous du pivot), on ajoute à la ligne L_4 dix fois la ligne L_2 (car $-10 + 10 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -5 & -60 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -90 \\ 0 & \textcircled{-10} & 20 & 50 & 600 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_4 + 10L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -60 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-10 + 10 \times 1 = 0$; $20 + 10 \times (-2) = 0$; $50 + 10 \times (-5) = 0$; $600 + 10 \times (-60) = 0$.

Sous le pivot de la colonne 2, il n'y a plus que des zéros.

Colonne 3. On cherche le pivot sur la ligne L_3. *Normalisation.* Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 (coefficients de z) : il vaut -2. Dans l'algorithme de Gauss-Jordan, **chaque pivot doit valoir** 1 : on multiplie L_3 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 7. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -60 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -5 & -90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}5 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times (-5) = 2{,}5$; $-\frac{1}{2} \times (-90) = 45$.

Annulation au-dessous du pivot. On fait apparaître des zéros sous le pivot de L_3, dans la colonne 3 (coefficients de z).

Le coefficient de L_4 dans cette colonne est déjà nul : rien à faire.

Sous le pivot de la colonne 3, il n'y a plus que des zéros.

Fin de la descente. La ligne L_4 est entièrement nulle, second membre compris : elle traduit l'équation $0 = 0$, toujours vraie, qui n'apporte aucune information.

Forme échelonnée

On note $A_e|B_e$ la matrice obtenue à la fin de la descente (l'indice e signifie « échelonnée ») :

$$A_e|B_e = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & -5 & -60 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2{,}5 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée que l'on lit les rangs.

Étape 4 Nature du système : théorème de Rouché-Fontené

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée :

— lignes non nulles de toute la matrice $A_e|B_e$: 3, donc $\operatorname{rang}(A|B) = 3$;

— lignes non nulles de A_e (à gauche de la barre) : 3, donc $\operatorname{rang}(A) = 3$.

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B) = 3 < m = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{20} \text{ est compatible indéterminé :}$$

il admet une **infinité de solutions**, que la remontée va permettre d'exprimer.

Étape 5 Remontée : algorithme de Jordan

On remonte maintenant **du dernier pivot vers le premier** : pour chaque pivot, on fait apparaître des **zéros au-dessus** de lui. Les pivots valent déjà 1 et tout ce qui se trouve sous eux est déjà nul.

Pivot de L_3, colonne 3. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 8. Pour annuler le -2 de L_2 (au-dessus du pivot), on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_3 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & \textcircled{-2} & -5 & -60 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2{,}5 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_2 + 2L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}5 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient (second membre compris) : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $-5 + 2 \times 2{,}5 = 0$; $-60 + 2 \times 45 = 30$.

Transformation 9. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \textcircled{1} & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2{,}5 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1{,}5 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}5 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $1 - 1 \times 2{,}5 = -1{,}5$; $100 - 1 \times 45 = 55$.

Pivot de L_2, colonne 2. On annule les coefficients situés au-dessus de ce pivot.

Transformation 10. Pour annuler le 1 de L_1 (au-dessus du pivot), on retranche à la ligne L_1 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \textcircled{1} & 0 & -1{,}5 & 55 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}5 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[O_3]{L_1 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1{,}5 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}5 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calcul de la nouvelle ligne L_1, coefficient par coefficient (second membre compris) : $1 - 1 \times 1 = 0$; $0 - 1 \times 0 = 0$; $-1{,}5 - 1 \times 0 = -1{,}5$; $55 - 1 \times 30 = 25$.

Fin de la remontée. Chaque pivot vaut 1 et c'est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Forme échelonnée réduite

On note $A_r|B_r$ la matrice obtenue (l'indice r signifie « réduite ») :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1{,}5 & 25 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2{,}5 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est sur cette forme échelonnée réduite que l'on lit les solutions.

Étape 6 Retour au système et lecture des solutions

On réécrit $A_r|B_r$ sous la forme d'un système d'équations ; la ligne nulle, qui traduit l'équation $0 = 0$, n'apporte aucune information et disparaît :

$$A_r|B_r = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1{,}5 & 25 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2{,}5 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x - 1{,}5t = 25 \\ y = 30 \\ z + 2{,}5t = 45 \end{cases}$$

— **Variables principales** (colonnes avec pivot) : x, y, z ;

— **Variable libre** (colonne sans pivot) : t.

Chaque équation contient une seule variable principale : on la laisse seule à gauche, en faisant passer à droite les termes des variables libres. Une variable libre peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** : on la remplace par un paramètre, en posant $t = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x = 25 + 1{,}5\alpha \\ y = 30 \\ z = 45 - 2{,}5\alpha \\ t = \alpha \end{cases}$$

Étape 7 Vérification

On choisit une solution particulière, par exemple avec $\alpha = 1$: $x = 26{,}5$, $y = 30$, $z = 42{,}5$, $t = 1$. On la remplace dans chaque équation du système de départ :

$$\begin{aligned} &\text{équation 1} : 1 \times 26{,}5 + 1 \times 30 + 1 \times 42{,}5 + 1 \times 1 \\ &\qquad = 26{,}5 + 30 + 42{,}5 + 1 = 100 \ \checkmark \\ &\text{équation 2} : 30 \times 26{,}5 + 20 \times 30 + 50 \times 42{,}5 + 80 \times 1 \\ &\qquad = 795 + 600 + 2125 + 80 = 3600 \ \checkmark \\ &\text{équation 3} : 1 \times 26{,}5 + 1 \times 42{,}5 + 1 \times 1 = 26{,}5 + 42{,}5 + 1 = 70 \ \checkmark \\ &\text{équation 4} : 10 \times 26{,}5 + 30 \times 42{,}5 + 60 \times 1 = 265 + 1275 + 60 = 1600 \ \checkmark \end{aligned}$$

Toutes les équations sont vérifiées.

Le système $\mathcal{S}_{20}$ admet une **infinité de solutions**, dépendant d'un seul paramètre :

$$\mathbb{S} = \left\{ (25 + 1{,}5\alpha, 30, 45 - 2{,}5\alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chaque valeur choisie pour le paramètre fournit une solution particulière.

Étape 8 Interprétation managériale

Toutes les quantités doivent être positives (ou nulles). On écrit cette condition pour chaque inconnue qui dépend du paramètre :

$$x = 25 + 1{,}5\alpha \geq 0$$
$$z = 45 - 2{,}5\alpha \geq 0$$
$$t = \alpha \geq 0$$

Ces conditions sont toutes vérifiées lorsque $\boxed{0 \leq \alpha \leq 18}$. Par exemple, pour $\alpha = 5$, on obtient $x = 32{,}5$, $y = 30$, $z = 32{,}5$, $t = 5$.

Le lot contient toujours exactement **30 kg de polyester** (puisque 70 kg sont des fibres naturelles). La contrainte du service achats était redondante (ligne nulle) : elle découle des autres. Le responsable de production garde une **marge de manœuvre** sur la quantité de laine α : chaque kilogramme de laine ajouté remplace 2,5 kg de lin par 1,5 kg de coton. Il choisira α selon la qualité recherchée (la laine apporte chaleur et douceur).

Bilan de la série

Ce qu'il faut retenir

— **Modéliser d'abord** : nommer les inconnues avec leurs unités, puis traduire chaque contrainte de gestion en une équation linéaire.

— **Même ordre des inconnues** dans toutes les équations, avant d'écrire $AX = B$.

— **Gauss-Jordan** : la descente (Gauss) donne la nature du système grâce à Rouché-Fontené ; la remontée (Jordan) donne les solutions ; on vérifie ensuite dans le système de départ.

— **Interpréter** : une solution unique fixe complètement la décision ; une infinité de solutions laisse une marge de manœuvre ; un système incompatible signale un cahier des charges irréalisable.

— **Vérifier le sens économique** : quantités positives, effectifs entiers, capacités respectées.

Récapitulatif des résultats

Ex.	Domaine	Taille	rang(A)	rang$(A\|B)$	Nature
1	Gestion de production	3×3	3	3	compatible déterminé
2	Production agroalimentaire (mélange)	3×3	3	3	compatible déterminé
3	Comptabilité de gestion	3×3	3	3	compatible déterminé
4	Marketing	3×3	3	3	compatible déterminé
5	Finance d'entreprise	3×3	3	3	compatible déterminé
6	Logistique	3×3	3	3	compatible déterminé
7	Contrôle de gestion	3×3	3	3	compatible déterminé
8	Contrôle de gestion	3×3	3	3	compatible déterminé
9	Trésorerie	3×3	2	2	compatible indéterminé
10	Production chimique (mélange)	3×3	2	3	incompatible
11	Gestion de production	3×4	3	3	compatible indéterminé
12	Marketing	3×4	3	3	compatible indéterminé
13	Finance d'entreprise	3×4	3	3	compatible indéterminé
14	Logistique	4×3	3	3	compatible déterminé
15	Gestion commerciale	4×3	3	3	compatible déterminé
16	Gestion des stocks	4×3	3	4	incompatible
17	Comptabilité de gestion	4×4	4	4	compatible déterminé
18	Production agroalimentaire	4×4	4	4	compatible déterminé
19	Ressources humaines	4×4	4	4	compatible déterminé
20	Production textile (mélange)	4×4	3	3	compatible indéterminé

Partie 3 : Quand les calculs se compliquent, MATLAB

▶ Les limites du calcul à la main

Tout au long de cette série, l'algorithme de Gauss-Jordan nous a permis de résoudre des problèmes de gestion variés et, surtout, d'en **comprendre la structure** : une solution unique lorsque les contraintes fixent complètement la décision, une marge de manœuvre lorsque certaines variables restent libres, un cahier des charges irréalisable lorsque les exigences se contredisent. Cette compréhension est indispensable : elle permet au gestionnaire d'interpréter correctement un résultat et de dialoguer avec les opérationnels.

Pourquoi passer par un logiciel ?

— **Le nombre d'opérations explose.** Un système 3×3 demande moins d'une dizaine d'opérations élémentaires, un système 4×4 en demande déjà de dix à quinze (exercices 17 à 19). Pour n équations, il en faut de l'ordre de n^2, chacune portant sur toute une ligne : un système de 20 équations, courant en contrôle de gestion, est hors de portée d'un calcul à la main.

— **Les décimaux compliquent tout.** Dans la pratique, les coefficients sont rarement des nombres ronds : taux de 3,75 %, temps de 1,35 heure, prix de 12,48 MAD… Chaque opération produit alors des nombres de plus en plus longs.

— **Le risque d'erreur est élevé.** Une seule erreur de calcul se propage à toutes les étapes suivantes et fausse la décision finale, sans qu'on s'en aperçoive forcément.

— **Le temps du gestionnaire est précieux.** Il doit être consacré à la modélisation et à l'interprétation, pas aux calculs.

Dans la pratique professionnelle, le gestionnaire s'appuie donc sur des outils de calcul scientifique comme **MATLAB** (ou ses équivalents gratuits Octave et Python). Le logiciel effectue en une fraction de seconde exactement les opérations que nous avons faites à la main, sans erreur, quelle que soit la taille du système. Le rôle du gestionnaire reste essentiel : **poser le bon modèle** (étape 1) et **interpréter le résultat** (dernière étape).

▶ Résoudre l'exercice 19 avec MATLAB

Reprenons le problème de planification des effectifs de **Nador Industries** (exercice 19), un système 4×4 qui a demandé quatorze opérations élémentaires à la main :

$$\begin{cases} 4x + 6y + 12z + 15t = 630 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + z - 9t = 0 \\ x + y + z + t = 100 \end{cases}$$

Script MATLAB : exercice 19

```
% Matrice des coefficients A (une ligne par equation)
A = [4 6 12 15;
     0 1 -2  0;
     1 1  1 -9;
```

```
     1 1  1  1];

% Vecteur des seconds membres B (vecteur colonne)
B = [630; 0; 0; 100];

% 1) Forme echelonnee reduite de la matrice augmentee (Gauss-Jordan)
R = rref([A B])

% 2) Diagnostic de Rouche-Fontene
rang_A  = rank(A)
rang_AB = rank([A B])

% 3) Solution directe du systeme
X = A\B
```

Résultat affiché par MATLAB

```
R =
    1     0     0     0    60
    0     1     0     0    20
    0     0     1     0    10
    0     0     0     1    10

rang_A  = 4
rang_AB = 4

X =
    60
    20
    10
    10
```

Comment lire ce résultat

- `rref([A B])` (*reduced row echelon form*) renvoie exactement la forme échelonnée réduite obtenue à la main : on reconnaît $(I_4 \mid S)$.
- `rank(A)` et `rank([A B])` donnent les deux rangs : ils valent $4 = m$, le système est compatible déterminé.
- `X = A\B` calcule directement la solution : 60 ouvriers, 20 techniciens, 10 ingénieurs et 10 cadres.
- Pour un système **indéterminé** ou **incompatible**, `A\B` affiche un avertissement ; on utilise alors `rref([A B])` et les rangs pour interpréter le résultat, exactement comme dans les corrigés.

Le même script, en changeant seulement `A` et `B`, résout n'importe lequel des vingt problèmes de la série, ou un système de cent équations, en une fraction de seconde. Le calcul manuel reste l'outil pour **comprendre** ; le logiciel est l'outil pour **décider vite et sans erreur**.