Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger

SÉRIE 3

SÉRIE D'EXERCICES CORRIGÉS

La trace et le déterminant

Ordre 2, règle de Sarrus et méthode des cofacteurs

OBJECTIF

Calculer le déterminant d'une matrice carrée avec chacune des méthodes du cours, puis en déduire si la matrice est inversible (régulière) ou non inversible (singulière).

21 exercices progressifs | Corrigés détaillés pas à pas | Ordres 2, 3 et 4

AU SOMMAIRE

Partie 1 **Énoncés** rappels du cours et 21 exercices

Partie 2 **Corrigés détaillés** calcul pas à pas et nature de la matrice

Bilan **Ce qu'il faut retenir** et récapitulatif des résultats

Partie 3 **MATLAB** quand les calculs se compliquent

MODULE	PROFESSEUR	ANNÉE UNIVERSITAIRE
Mathématiques pour la gestion	**Jaouad Madkour**	**2026–2027**

Partie 1 : Énoncés

▶ Rappels du cours

La série 2 a montré comment multiplier deux matrices. On s'intéresse maintenant aux matrices carrées, auxquelles on associe deux nombres : la trace et surtout le déterminant. C'est le déterminant qui dira si une matrice est inversible (série 4), puis si un système admet une solution unique (série 9).

Avant d'aborder les exercices, rappelons ce qu'est la trace d'une matrice carrée, les trois méthodes de calcul du déterminant vues en cours, la règle des cas particuliers et ce que le déterminant nous apprend sur la matrice.

La trace d'une matrice carrée

La **trace** d'une matrice carrée A d'ordre n, notée $tr(A)$, est la **somme** des coefficients de sa diagonale principale : $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Exemple du cours :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 5 & 3 \\ 1 & \mathbf{3} & 2 \\ 2 & 2 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad tr(A) = 2+3+1 = 6.$$

La trace n'existe que pour une matrice carrée.

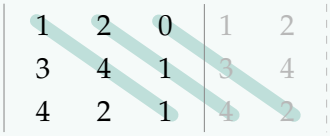
Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Le déterminant d'une matrice carrée A, noté $\det(A)$ ou $|A|$, est un nombre. Pour une matrice d'ordre 2, c'est la différence entre le produit des coefficients de la diagonale principale et le produit des deux autres coefficients :

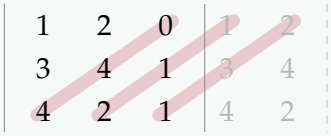
$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \times d - c \times b \qquad \text{exemple : } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2.$$

Déterminant d'une matrice d'ordre 3 : la règle de Sarrus

On recopie, dans l'ordre, les deux premières colonnes à droite de la matrice (ou les deux premières lignes en dessous). On additionne les produits des trois **diagonales descendantes** et on soustrait les produits des trois **diagonales ascendantes**. Exemple du cours :



$4+8+0 = 12$



$0+2+6 = 8$

$$\det(A) = 12 - 8 = 4$$

Attention : la règle de Sarrus **ne s'applique qu'aux matrices carrées d'ordre 3**.

Sous-matrice, mineur et cofacteur

Pour le coefficient a_{ij} (ligne i, colonne j) d'une matrice A :

— la **sous-matrice** A_{ij} s'obtient en supprimant la ligne i et la colonne j de A ;

— son déterminant $\det(A_{ij})$ est le **mineur** associé à a_{ij} ;

— le **cofacteur** associé à a_{ij} est $c_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det(A_{ij})$.

Remarque. Le déterminant d'une matrice qui ne contient qu'une ligne et une colonne, c'est-à-dire d'un seul nombre, est égal à ce nombre : par exemple, $\det(-5) = -5$. C'est ce qui se produit lorsque l'on supprime une ligne et une colonne d'une matrice d'ordre 2.
Le signe $(-1)^{i+j}$ vaut $+1$ si $i+j$ est pair et -1 si $i+j$ est impair. Il suit une grille qui commence par $+$ en haut à gauche, puis alterne :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Déterminant d'ordre quelconque : la méthode des cofacteurs

1. Choisir une ligne ou une colonne, de préférence celle qui contient **le plus de zéros**.
2. Calculer le cofacteur de chacun de ses coefficients non nuls.
3. Multiplier chaque coefficient par son cofacteur, puis additionner.

Par exemple, pour une matrice d'ordre 3 :

$$\begin{aligned} \text{selon la ligne 1 :} \quad & \det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ \text{selon la colonne 2 :} \quad & \det(A) = a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32} \end{aligned}$$

Pour une matrice d'ordre 4, les mineurs sont d'ordre 3 : on les calcule ensuite par Sarrus ou, à nouveau, par les cofacteurs.

Cas particuliers : matrices triangulaires et diagonales

Le déterminant d'une matrice **triangulaire** (supérieure ou inférieure) ou **diagonale** est égal au **produit des coefficients de sa diagonale principale** :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 5 & -1 \\ 0 & \mathbf{3} & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-1) = -6 \qquad \det(I_n) = 1.$$

En particulier, une telle matrice est singulière dès qu'un seul coefficient diagonal est nul.

Ce que le déterminant nous apprend

— Si $\det(A) \neq 0$, la matrice A est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

— Si $\det(A) = 0$, la matrice A est **non inversible** (on dit aussi **singulière**).

Consigne commune

Pour chaque exercice, calculer le ou les déterminants demandés avec la méthode indiquée, en détaillant chaque étape, puis conclure : la matrice est-elle inversible (régulière) ou non inversible (singulière) ?

▶ Les exercices

Exercice 1 : La trace d'une matrice carrée

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer, lorsqu'elle existe, la trace de chacune des matrices A, B, C et I_4.
2) Sans calcul supplémentaire, donner la trace de $A^\top$.

corrigé p. 9 →

Exercice 2 : Ordre 2, coefficients positifs

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ?

corrigé p. 10 →

Exercice 3 : Ordre 2, coefficients négatifs

Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(B)$. La matrice B est-elle inversible ?

corrigé p. 11 →

Exercice 4 : Ordre 2, un cas singulier

Soit la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(C)$. La matrice C est-elle inversible ?

corrigé p. 11 →

Exercice 5 : Ordre 2, avec un paramètre

Soit $D = \begin{pmatrix} m & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, où m est un nombre réel. Calculer $\det(D)$ en fonction de m, puis déterminer la valeur de m pour laquelle D est singulière.

corrigé p. 12 →

Exercice 6 : Sarrus, colonnes recopiées à droite

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$ par la règle de Sarrus, en recopiant les deux premières colonnes à droite. La matrice A est-elle inversible ?

corrigé p. 12 →

Exercice 7 : Sarrus, colonnes recopiées à droite

Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(B)$ par la règle de Sarrus, en recopiant les deux premières colonnes à droite. La matrice B est-elle inversible ?

corrigé p. 13 →

Exercice 8 : Sarrus, lignes recopiées en dessous

Soit la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(C)$ par la règle de Sarrus, en recopiant les deux premières lignes en dessous. La matrice C est-elle inversible ?

corrigé p. 14 →

Exercice 9 : Sarrus, lignes recopiées en dessous : un cas singulier

Soit la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(D)$ par la règle de Sarrus, en recopiant les deux premières lignes en dessous. La matrice D est-elle inversible ?

corrigé p. 15 →

Exercice 10 : Mineurs et cofacteurs de la ligne 1

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Écrire les sous-matrices A_{11}, A_{12} et A_{13}.
2) Calculer les mineurs $\det(A_{11})$, $\det(A_{12})$, $\det(A_{13})$ et les cofacteurs c_{11}, c_{12}, c_{13}.
3) En déduire $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ?

corrigé p. 16 →

Exercice 11 : Mineurs et cofacteurs de la colonne 2

Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les cofacteurs c_{12}, c_{22} et c_{32} des coefficients de la colonne 2.
2) En déduire $\det(B)$. La matrice B est-elle inversible ?

corrigé p. 17 →

Exercice 12 : Les neuf cofacteurs d'une matrice d'ordre 3

Soit la matrice :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les neuf cofacteurs c_{ij} de F.
2) En déduire $\det(F)$ de deux façons : selon la ligne 1, puis selon la colonne 3. La matrice F est-elle inversible ?

corrigé p. 18 →

Exercice 13 : Développement selon une ligne

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$ en développant selon la ligne 1. La matrice A est-elle inversible ?

corrigé p. 19 →

Exercice 14 : Développement selon une colonne

Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(B)$ par la méthode des cofacteurs, en choisissant judicieusement la ligne ou la colonne de développement. La matrice B est-elle inversible ?

corrigé p. 20 →

Exercice 15 : Sarrus et cofacteurs : deux méthodes, un seul résultat

Soit la matrice :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(G)$ par la règle de Sarrus, puis par la méthode des cofacteurs, et vérifier que les deux résultats sont égaux. La matrice G est-elle inversible ?

corrigé p. 21 →

Exercice 16 : Une matrice avec beaucoup de zéros

Soit la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(D)$ par la méthode des cofacteurs, en choisissant judicieusement la ligne ou la colonne de développement. La matrice D est-elle inversible ?

corrigé p. 23 →

Exercice 17 : Ordre 4 : une ligne avec trois zéros

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$ par la méthode des cofacteurs. La matrice A est-elle inversible ?

corrigé p. 24 →

Exercice 18 : Ordre 4 : une colonne avec deux zéros

Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(B)$ par la méthode des cofacteurs. La matrice B est-elle inversible ?

corrigé p. 25 →

Exercice 19 : Ordre 4 : cofacteurs en cascade

Soit la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(H)$ en développant d'abord selon la colonne 1, puis en calculant le mineur obtenu, lui aussi, par la méthode des cofacteurs. La matrice H est-elle inversible ?

corrigé p. 26 →

Exercice 20 : Matrices triangulaires et diagonale

Soient les matrices :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les déterminants de T, L et Δ par la méthode des cofacteurs, puis comparer chaque résultat au produit des coefficients de la diagonale principale. En déduire une règle de calcul.
2) Appliquer cette règle pour calculer directement $\det(U)$, puis $\det(I_n)$. Ces matrices sont-elles inversibles ?

corrigé p. 28 →

Exercice 21 : Déterminants nuls : lignes ou colonnes proportionnelles, ligne nulle

Soient les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(P)$, $\det(Z)$ et $\det(Q)$. Que remarque-t-on ? Ces matrices sont-elles inversibles ?

corrigé p. 31 →

Partie 2 : Corrigés détaillés

Conventions de lecture

— Règle de Sarrus : les coefficients recopiés sont en gris, les diagonales descendantes en **vert** et les diagonales ascendantes en **rouge**.

— Méthode des cofacteurs : les coefficients de la ligne ou de la colonne de développement sont en **bleu** ; pour former une sous-matrice, la ligne et la colonne supprimées sont en gris.

— Le déterminant final est encadré : $\boxed{\det(A)}$.

Corrigé de l'exercice 1

trace

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La **trace** d'une matrice carrée est la somme des coefficients de sa diagonale principale, c'est-à-dire des coefficients $a_{11}, a_{22}, \ldots$ qui ont le même numéro de ligne et de colonne.

Matrice A

A est carrée d'ordre 3 ; sa diagonale principale contient 3, 5, 5 :

$$tr(A) = 3 + 5 + 5 \;=\; \mathbf{13}$$

Matrice B

B est carrée d'ordre 2 ; sa diagonale principale contient -2, 4 :

$$tr(B) = (-2) + 4 \;=\; \mathbf{2}$$

Matrice I_4

I_4 est carrée d'ordre 4 ; sa diagonale principale contient 1, 1, 1, 1 :

$$tr(I_4) = 1 + 1 + 1 + 1 \;=\; \mathbf{4}$$

Matrice C

C est de taille 2×3 : elle n'est pas carrée, elle n'a donc pas de diagonale principale complète. **La trace de C n'existe pas.**

Trace de $A^\top$

Transposer une matrice ne déplace pas les coefficients de la diagonale principale : $A^\top$ a la même diagonale que A, donc $tr(A^\top) = tr(A) = 13$.

$tr(A) = 13$, $tr(B) = 2$, $tr(I_4) = 4$; la trace de C n'existe pas, car C n'est pas carrée.

Remarque

La trace ne concerne que les matrices **carrées**. C'est un calcul très simple, à ne pas confondre avec le déterminant : la trace **additionne** les coefficients diagonaux, alors que le déterminant d'une matrice triangulaire, comme on le verra à l'exercice 20, les **multiplie**.

Corrigé de l'exercice 2 — $\det(A)$

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour une matrice d'ordre 2, le déterminant est la différence entre le produit des coefficients de la diagonale principale et le produit des deux autres coefficients :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 5 \times 2 = 12 - 10 = 2.$$

$\det(A) = 2 \neq 0$: la matrice A est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Corrigé de l'exercice 3 $\det(B)$

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Pour une matrice d'ordre 2, le déterminant est la différence entre le produit des coefficients de la diagonale principale et le produit des deux autres coefficients :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-2) \times (-5) - 3 \times 4 = 10 - 12 = -2.$$

$\det(B) = -2 \neq 0$: la matrice B est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Remarque

Attention aux signes : $(-2) \times (-5) = 10$ (moins par moins donne plus), puis on retranche $3 \times 4 = 12$.

Corrigé de l'exercice 4 $\det(C)$

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour une matrice d'ordre 2, le déterminant est la différence entre le produit des coefficients de la diagonale principale et le produit des deux autres coefficients :

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times 2 - (-4) \times (-3) = 12 - 12 = 0.$$

$\det(C) = 0$: la matrice C est **non inversible** (on dit aussi **singulière**).

Remarque

Les deux colonnes de C sont proportionnelles : la première est égale à la deuxième multipliée par $-\frac{3}{2}$. C'est ce qui rend le déterminant nul.

Corrigé de l'exercice 5

$\det(D)$, paramètre m

Pour une matrice d'ordre 2, le déterminant est la différence entre le produit des coefficients de la diagonale principale et le produit des deux autres coefficients :

$$\det(D) = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = m \times 6 - 4 \times 3 = 6m - 12.$$

La matrice D est singulière lorsque son déterminant est nul :

$$6m - 12 = 0 \iff 6m = 12 \iff m = 2.$$

Vérification. Pour $m = 2$: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 4 \times 3 = 12 - 12 = 0.$

Si $m = 2$, $\det(D) = 0$: la matrice D est **non inversible** (singulière). Pour toute autre valeur de m, $\det(D) \neq 0$: la matrice D est **inversible** (régulière).

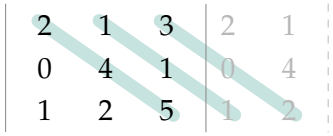
Corrigé de l'exercice 6

Sarrus

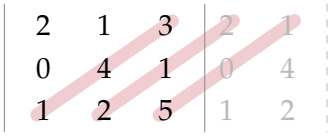
Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

On recopie, dans l'ordre, les deux premières colonnes de A à droite de la matrice (en gris). On obtient trois diagonales descendantes (en vert) et trois diagonales ascendantes (en rouge) :



diagonales descendantes : $+$



diagonales ascendantes : $-$

Somme des produits des diagonales descendantes :

$$D = 2 \times 4 \times 5 + 1 \times 1 \times 1 + 3 \times 0 \times 2 = 40 + 1 + 0 = \mathbf{41}$$

Somme des produits des diagonales ascendantes :

$$M = 1 \times 4 \times 3 + 2 \times 1 \times 2 + 5 \times 0 \times 1 = 12 + 4 + 0 = \mathbf{16}$$

Le déterminant est la différence entre ces deux sommes :

$$\det(A) = D - M = 41 - 16 = \boxed{25}$$

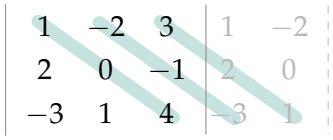
$\det(A) = 25 \neq 0$: la matrice A est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Corrigé de l'exercice 7 — Sarrus

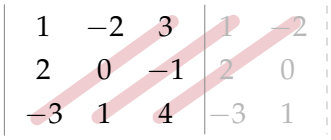
Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On recopie, dans l'ordre, les deux premières colonnes de B à droite de la matrice (en gris). On obtient trois diagonales descendantes (en vert) et trois diagonales ascendantes (en rouge) :



diagonales descendantes : $+$



diagonales ascendantes : $-$

Somme des produits des diagonales descendantes :

$$D = 1\times 0\times 4 + (-2)\times(-1)\times(-3) + 3\times 2\times 1 = 0 - 6 + 6 \;=\; \mathbf{0}$$

Somme des produits des diagonales ascendantes :

$$M = (-3)\times 0\times 3 + 1\times(-1)\times 1 + 4\times 2\times(-2) = 0 - 1 - 16 \;=\; \mathbf{-17}$$

Le déterminant est la différence entre ces deux sommes :

$$\det(B) = D - M = 0 - (-17) \;=\; \boxed{17}$$

$\det(B) = 17 \neq 0$: la matrice B est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Remarque

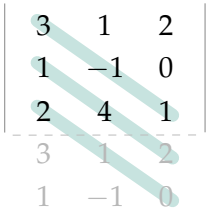
Avec des coefficients négatifs, on écrit chaque produit avec ses parenthèses avant de l'effectuer : c'est là que se glissent la plupart des erreurs de signe.

Corrigé de l'exercice 8 — Sarrus

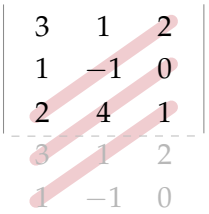
Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On recopie, dans l'ordre, les deux premières lignes de C sous la matrice (en gris). On obtient trois diagonales descendantes (en vert) et trois diagonales ascendantes (en rouge) :



diagonales descendantes : $+$



diagonales ascendantes : $-$

Somme des produits des diagonales descendantes :

$$D = 3 \times (-1) \times 1 + 1 \times 4 \times 2 + 2 \times 1 \times 0 = -3 + 8 + 0 \ = \ \mathbf{5}$$

Somme des produits des diagonales ascendantes :

$$M = 2 \times (-1) \times 2 + 3 \times 4 \times 0 + 1 \times 1 \times 1 = -4 + 0 + 1 \ = \ \mathbf{-3}$$

Le déterminant est la différence entre ces deux sommes :

$$\det(C) = D - M = 5 - (-3) \ = \ \boxed{8}$$

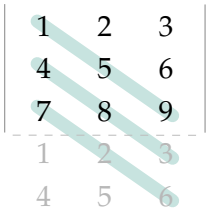
$\det(C) = 8 \neq 0$: la matrice C est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Corrigé de l'exercice 9 — Sarrus

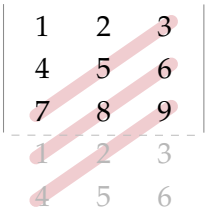
Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

On recopie, dans l'ordre, les deux premières lignes de D sous la matrice (en gris). On obtient trois diagonales descendantes (en vert) et trois diagonales ascendantes (en rouge) :



diagonales descendantes : $+$



diagonales ascendantes : $-$

Somme des produits des diagonales descendantes :

$$D = 1 \times 5 \times 9 + 4 \times 8 \times 3 + 7 \times 2 \times 6 = 45 + 96 + 84 \;=\; \mathbf{225}$$

Somme des produits des diagonales ascendantes :

$$M = 7 \times 5 \times 3 + 1 \times 8 \times 6 + 4 \times 2 \times 9 = 105 + 48 + 72 \;=\; \mathbf{225}$$

Le déterminant est la différence entre ces deux sommes :

$$\det(D) = D - M = 225 - 225 \;=\; \boxed{0}$$

$\det(D) = 0$: la matrice D est **non inversible** (on dit aussi **singulière**).

Remarque

Le déterminant est nul : la ligne 3 s'obtient à partir des deux premières ($L_3 = 2L_2 - L_1$). Rappel : la règle de Sarrus **ne s'applique qu'aux matrices d'ordre 3**.

Corrigé de l'exercice 10 — cofacteurs

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

On met en évidence la ligne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté a_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans A ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & -1 & 3 \end{matrix}} \\ 1 \quad 4 \quad 0 \\ -2 \quad 1 \quad 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{11} = 2 &\longrightarrow c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(A_{11}) \\ a_{12} = -1 &\longrightarrow c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(A_{12}) \\ a_{13} = 3 &\longrightarrow c_{13} = (-1)^{1+3} \times \det(A_{13}) \end{aligned}$$

Pour chaque élément sélectionné, on supprime sa ligne et sa colonne (en gris) pour obtenir la sous-matrice, puis on calcule le mineur et le cofacteur.

Élément $a_{11} = 2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{11}) = 4 \times 5 - 0 \times 1 = 20 - 0 = 20 \qquad c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(A_{11}) = 1 \times 20 \;=\; \mathbf{20}$$

Élément $a_{12} = -1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{12}) = 1 \times 5 - 0 \times (-2) = 5 - 0 = 5 \qquad c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(A_{12}) = (-1) \times 5 \;=\; \mathbf{-5}$$

Élément $a_{13} = 3$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{13}) = 1 \times 1 - 4 \times (-2) = 1 - (-8) = 9 \qquad c_{13} = (-1)^{1+3} \times \det(A_{13}) = 1 \times 9 \;=\; \mathbf{9}$$

Déterminant. C'est la somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur :

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 2 \times 20 + (-1) \times (-5) + 3 \times 9 = 40 + 5 + 27 \;=\; \boxed{72}$$

$\det(A) = 72 \neq 0$: la matrice A est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Remarque

Le signe $(-1)^{i+j}$ vaut $+1$ quand $i+j$ est pair et -1 quand $i+j$ est impair : pour la ligne 1, les signes alternent $+, -, +$.

Corrigé de l'exercice 11 — cofacteurs

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

On met en évidence la colonne 2 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté b_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans B ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 \\ 2 & \boxed{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} b_{12} = 3 &\longrightarrow c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(B_{12}) \\ b_{22} = -1 &\longrightarrow c_{22} = (-1)^{2+2} \times \det(B_{22}) \\ b_{32} = 5 &\longrightarrow c_{32} = (-1)^{3+2} \times \det(B_{32}) \end{aligned}$$

Pour chaque élément sélectionné, on supprime sa ligne et sa colonne (en gris).

Élément $b_{12} = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B_{12}) = 0 \times 1 - 4 \times 2 = 0 - 8 = -8 \qquad c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(B_{12}) = (-1) \times (-8) = \mathbf{8}$$

Élément $b_{22} = -1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B_{22}) = 1 \times 1 - 2 \times 2 = 1 - 4 = -3 \qquad c_{22} = (-1)^{2+2} \times \det(B_{22}) = 1 \times (-3) = \mathbf{-3}$$

Élément $b_{32} = 5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(B_{32}) = 1 \times 4 - 2 \times 0 = 4 - 0 = 4 \qquad c_{32} = (-1)^{3+2} \times \det(B_{32}) = (-1) \times 4 = \mathbf{-4}$$

Déterminant. C'est la somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur :

$$\det(B) = b_{12}c_{12} + b_{22}c_{22} + b_{32}c_{32} = 3 \times 8 + (-1) \times (-3) + 5 \times (-4) = 24 + 3 - 20 = \boxed{7}$$

$\det(B) = 7 \neq 0$: la matrice B est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Remarque

Pour la colonne 2, les signes $(-1)^{i+j}$ sont $-, +, -$: le signe dépend de la position du coefficient, pas de sa valeur.

Corrigé de l'exercice 12

cofacteurs

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Les signes $(-1)^{i+j}$ suivent la grille ci-dessous : on commence par $+$ en haut à gauche, puis on alterne.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Pour chaque coefficient, on supprime sa ligne et sa colonne, on calcule le mineur, puis on applique le signe de la grille.

$$c_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = + (1 \times 4 - 2 \times 0) = + (4 - 0) = 4$$

$$c_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = - (3 \times 4 - 2 \times (-1)) = - (12 - (-2)) = -14$$

$$c_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = + (3 \times 0 - 1 \times (-1)) = + (0 - (-1)) = 1$$

$$c_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = - (2 \times 4 - 0 \times 0) = - (8 - 0) = -8$$

$$c_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = + (1 \times 4 - 0 \times (-1)) = + (4 - 0) = 4$$

$$c_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = - (1 \times 0 - 2 \times (-1)) = - (0 - (-2)) = -2$$

$$c_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = + (2 \times 2 - 0 \times 1) = + (4 - 0) = 4$$

$$c_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = - (1 \times 2 - 0 \times 3) = - (2 - 0) = -2$$

$$c_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = + (1 \times 1 - 2 \times 3) = + (1 - 6) = + (-5) = -5$$

On range les cofacteurs à la place des coefficients :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Déterminant. Selon la ligne 1 :

$$\det(F) = 1\times 4 + 2\times(-14) + 0\times 1 = 4 - 28 + 0 \;=\; \boxed{-24}$$

Selon la colonne 3, on retrouve le même résultat :

$$\det(F) = 0\times 1 + 2\times(-2) + 4\times(-5) = 0 - 4 - 20 \;=\; -24$$

$\det(F) = -24 \neq 0$: la matrice F est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Remarque

La matrice des cofacteurs servira dans la série suivante, pour calculer la matrice inverse.

Corrigé de l'exercice 13

cofacteurs

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aucune ligne ni aucune colonne ne contient de zéro : on peut développer selon n'importe laquelle. On choisit la ligne 1.

On met en évidence la ligne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté a_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans A ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \end{matrix}} \\ 3 \quad 2 \quad 4 \\ 1 \quad -3 \quad 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} = 2 \quad &\longrightarrow \quad c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(A_{11}) \\ a_{12} = 1 \quad &\longrightarrow \quad c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(A_{12}) \\ a_{13} = -1 \quad &\longrightarrow \quad c_{13} = (-1)^{1+3} \times \det(A_{13}) \end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(A) = a_{11}\,c_{11} + a_{12}\,c_{12} \;+\; a_{13}\,c_{13}$$

Cofacteur c_{11} (associé à $a_{11} = 2$). On supprime la ligne 1 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{11}) = 2\times 2 - 4\times(-3) = 4 - (-12) \;=\; 16$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times 16 = 1 \times 16 = 16 \qquad \Longrightarrow \qquad a_{11}\,c_{11} = 2 \times 16 \;=\; 32$$

Cofacteur c_{12} (associé à $a_{12} = 1$). On supprime la ligne 1 et la colonne 2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{12}) = 3\times 2 - 4\times 1 = 6-4 \;=\; 2$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\times 2 = (-1)\times 2 = -2 \qquad \Longrightarrow \qquad a_{12}\,c_{12} = 1\times(-2) \;=\; -2$$

Cofacteur c_{13} (associé à $a_{13} = -1$). On supprime la ligne 1 et la colonne 3 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{13}) = 3\times(-3) - 2\times 1 = -9-2 \;=\; -11$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\times(-11) = 1\times(-11) = -11 \qquad \Longrightarrow \qquad a_{13}\,c_{13} = (-1)\times(-11) \;=\; 11$$

On additionne les produits :

$$\det(A) = 32 - 2 + 11 \;=\; \boxed{41}$$

$\det(A) = 41 \neq 0$: la matrice A est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Corrigé de l'exercice 14

cofacteurs

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Choix stratégique. On cherche la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros : la colonne 2 en contient 2, c'est le maximum.

On met en évidence la colonne 2 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté b_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans B ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} 3 & \boxed{0} & 2 \\ 1 & \boxed{4} & -1 \\ 2 & \boxed{0} & 5 \end{pmatrix}$$

$b_{12} = 0 \longrightarrow c_{12}$: inutile à calculer

$b_{22} = 4 \longrightarrow c_{22} = (-1)^{2+2}\times\det(B_{22})$

$b_{32} = 0 \longrightarrow c_{32}$: inutile à calculer

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(B) = b_{12}\,c_{12} + b_{22}\,c_{22} \;+\; b_{32}\,c_{32}$$

Comme b_{12}, b_{32} sont nuls, les produits $b_{12}\,c_{12}$, $b_{32}\,c_{32}$ sont nuls **quelle que soit la valeur des cofacteurs** : il est inutile de les calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det(B) = b_{22}\,c_{22}$$

Cofacteur c_{22} (associé à $b_{22} = 4$). On supprime la ligne 2 et la colonne 2 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow B_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(B_{22}) = 3\times 5 - 2\times 2 = 15 - 4 \;=\; 11$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\times 11 = 1\times 11 = 11 \qquad\Longrightarrow\qquad b_{22}\,c_{22} = 4\times 11 \;=\; 44$$

Un seul produit est non nul :

$$\det(B) = \boxed{44}$$

$\det(B) = 44 \neq 0$: la matrice B est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Remarque

Avec deux zéros dans la colonne 2, un seul cofacteur reste à calculer : le choix de la ligne ou de la colonne de développement fait gagner beaucoup de temps.

Corrigé de l'exercice 15

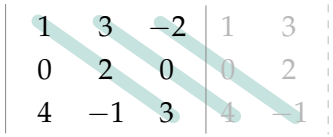
Sarrus et cofacteurs

Rappelons la matrice de l'énoncé :

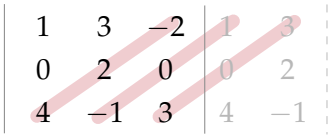
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Méthode 1 : règle de Sarrus

On recopie, dans l'ordre, les deux premières colonnes de G à droite de la matrice (en gris). On obtient trois diagonales descendantes (en vert) et trois diagonales ascendantes (en rouge) :



diagonales descendantes : $+$



diagonales ascendantes : $-$

Somme des produits des diagonales descendantes :

$$D = 1\times 2\times 3 + 3\times 0\times 4 + (-2)\times 0\times(-1) = 6+0+0 \;=\; \mathbf{6}$$

Somme des produits des diagonales ascendantes :

$$M = 4\times 2\times(-2) + (-1)\times 0\times 1 + 3\times 0\times 3 = -16+0+0 \;=\; \mathbf{-16}$$

Le déterminant est la différence entre ces deux sommes :

$$\det(G) = D - M = 6 - (-16) \;=\; \boxed{22}$$

Méthode 2 : cofacteurs

Choix stratégique. On cherche la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros : la ligne 2 en contient 2, c'est le maximum.

On met en évidence la ligne 2 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté g_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans G ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{0} \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{21} = 0 &\longrightarrow c_{21} \text{ : inutile à calculer} \\ g_{22} = 2 &\longrightarrow c_{22} = (-1)^{2+2} \times \det(G_{22}) \\ g_{23} = 0 &\longrightarrow c_{23} \text{ : inutile à calculer} \end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(G) = g_{21}\, c_{21} + g_{22}\, c_{22} \; + \; g_{23}\, c_{23}$$

Comme g_{21}, g_{23} sont nuls, les produits $g_{21}\, c_{21}$, $g_{23}\, c_{23}$ sont nuls **quelle que soit la valeur des cofacteurs** : il est inutile de les calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det(G) = g_{22}\, c_{22}$$

Cofacteur c_{22} (associé à $g_{22} = 2$). On supprime la ligne 2 et la colonne 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow G_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(G_{22}) = 1 \times 3 - (-2) \times 4 = 3 - (-8) \; = \; 11$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \times 11 = 1 \times 11 = 11 \qquad \Longrightarrow \qquad g_{22}\, c_{22} = 2 \times 11 \; = \; 22$$

Un seul produit est non nul :

$$\det(G) = \boxed{22}$$

Les deux méthodes donnent bien le même résultat : $\det(G) = 22$.

$\det(G) = 22 \neq 0$: la matrice G est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Corrigé de l'exercice 16

cofacteurs

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Choix stratégique. On cherche la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros : la colonne 1 en contient 2, c'est le maximum.

On met en évidence la colonne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté d_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans D ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}} & 5 & 0 \\ & -1 & 3 \\ & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d_{11} = 0 &\longrightarrow c_{11} \text{ : inutile à calculer} \\ d_{21} = 2 &\longrightarrow c_{21} = (-1)^{2+1} \times \det(D_{21}) \\ d_{31} = 0 &\longrightarrow c_{31} \text{ : inutile à calculer} \end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(D) = d_{11}\, c_{11} + d_{21}\, c_{21} \; + \; d_{31}\, c_{31}$$

Comme d_{11}, d_{31} sont nuls, les produits $d_{11}\, c_{11}$, $d_{31}\, c_{31}$ sont nuls **quelle que soit la valeur des cofacteurs** : il est inutile de les calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det(D) = d_{21}\, c_{21}$$

Cofacteur c_{21} (associé à $d_{21} = 2$). On supprime la ligne 2 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow D_{21} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(D_{21}) = 5 \times 0 - 0 \times 4 = 0 - 0 \; = \; 0$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \times 0 = (-1) \times 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad d_{21}\, c_{21} = 2 \times 0 \; = \; 0$$

Un seul produit est non nul :

$$\det(D) = \boxed{0}$$

$\det(D) = 0$: la matrice D est **non inversible** (on dit aussi **singulière**).

Remarque

Les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles (la colonne 3 vaut $\frac{3}{2}$ fois la colonne 1) : le déterminant ne pouvait être que nul.

Corrigé de l'exercice 17 ordre 4

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Choix stratégique. On cherche la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros : la ligne 2 en contient 3, c'est le maximum.

On met en évidence la ligne 2 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté a_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans A ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{5} \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= 0 \longrightarrow c_{21} \text{ : inutile à calculer} \\ a_{22} &= 0 \longrightarrow c_{22} \text{ : inutile à calculer} \\ a_{23} &= 0 \longrightarrow c_{23} \text{ : inutile à calculer} \\ a_{24} &= 5 \longrightarrow c_{24} = (-1)^{2+4} \times \det(A_{24}) \end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(A) = a_{21}\,c_{21} + a_{22}\,c_{22} + a_{23}\,c_{23} \; + \; a_{24}\,c_{24}$$

Comme a_{21}, a_{22}, a_{23} sont nuls, les produits $a_{21}\,c_{21}$, $a_{22}\,c_{22}$, $a_{23}\,c_{23}$ sont nuls **quelle que soit la valeur des cofacteurs** : il est inutile de les calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det(A) = a_{24}\,c_{24}$$

Cofacteur c_{24} (associé à $a_{24} = 5$). On supprime la ligne 2 et la colonne 4 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{24} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce mineur est d'ordre 3 ; on le calcule par la règle de Sarrus :

$$\det(A_{24}) = (6+8+0) - (0+0+1) = 14 - 1 \;=\; 13$$

$$c_{24} = (-1)^{2+4} \times 13 = 1 \times 13 = 13 \qquad \Longrightarrow \qquad a_{24}\,c_{24} = 5 \times 13 \;=\; 65$$

Un seul produit est non nul :

$$\det(A) = \boxed{65}$$

$\det(A) = 65 \neq 0$: la matrice A est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Remarque

Pour une matrice d'ordre 4, la règle de Sarrus ne s'applique pas : on se ramène à des mineurs d'ordre 3, que l'on calcule ensuite par Sarrus. Ici, un seul mineur suffit.

Corrigé de l'exercice 18 ordre 4

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Choix stratégique. On cherche la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros : la colonne 2 en contient 2, c'est le maximum.

On met en évidence la colonne 2 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté b_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans B ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 2 & -1 \\ 3 & \boxed{2} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 2 \\ 2 & \boxed{0} & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_{12} = 0 &\longrightarrow c_{12} \text{ : inutile à calculer} \\ b_{22} = 2 &\longrightarrow c_{22} = (-1)^{2+2} \times \det(B_{22}) \\ b_{32} = 1 &\longrightarrow c_{32} = (-1)^{3+2} \times \det(B_{32}) \\ b_{42} = 0 &\longrightarrow c_{42} \text{ : inutile à calculer} \end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(B) = b_{12}\,c_{12} + b_{22}\,c_{22} + b_{32}\,c_{32} \; + \; b_{42}\,c_{42}$$

Comme b_{12}, b_{42} sont nuls, les produits $b_{12}\,c_{12}$, $b_{42}\,c_{42}$ sont nuls **quelle que soit la valeur des cofacteurs** : il est inutile de les calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det(B) = b_{22}\,c_{22} + b_{32}\,c_{32}$$

Cofacteur c_{22} (associé à $b_{22} = 2$). On supprime la ligne 2 et la colonne 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ce mineur est d'ordre 3 ; on le calcule par la règle de Sarrus :

$$\det(B_{22}) = (12 + 8 + 0) - (-8 + 2 + 0) = 20 - (-6) \; = \; 26$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \times 26 = 1 \times 26 = 26 \qquad \Longrightarrow \qquad b_{22}\,c_{22} = 2 \times 26 \; = \; 52$$

Cofacteur c_{32} (associé à $b_{32} = 1$). On supprime la ligne 3 et la colonne 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow B_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ce mineur est d'ordre 3 ; on le calcule par la règle de Sarrus :

$$\det(B_{32}) = (0+4-3) - (0+1+18) = 1 - 19 \;=\; -18$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \times (-18) = (-1) \times (-18) = 18 \qquad \Longrightarrow \qquad b_{32}\, c_{32} = 1 \times 18 \;=\; 18$$

On additionne les produits :

$$\det(B) = 52 + 18 \;=\; \boxed{70}$$

$\det(B) = 70 \neq 0$: la matrice B est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Corrigé de l'exercice 19

ordre 4

Rappelons la matrice de l'énoncé :

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Choix stratégique. On cherche la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros : la colonne 1 en contient 3, c'est le maximum.

On met en évidence la colonne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté h_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans H ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & 1 & -2 & 4 \\ & 2 & 1 & 3 \\ & -1 & 2 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$h_{11} = 3 \longrightarrow c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(H_{11})$

$h_{21} = 0 \longrightarrow c_{21}$: inutile à calculer

$h_{31} = 0 \longrightarrow c_{31}$: inutile à calculer

$h_{41} = 0 \longrightarrow c_{41}$: inutile à calculer

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(H) = h_{11}c_{11} + h_{21}c_{21} + h_{31}c_{31} \;+\; h_{41}c_{41}$$

Comme h_{21}, h_{31}, h_{41} sont nuls, les produits correspondants sont nuls **quelle que soit la valeur des cofacteurs** : il est inutile de les calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la colonne qui contient le plus de zéros : ici, un seul cofacteur reste à calculer.

$$\det(H) = h_{11}\, c_{11} = \; 3 \times \; c_{11}$$

Cofacteur c_{11} (associé à $h_{11} = 3$). On supprime la ligne 1 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow H_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le mineur $\det(H_{11})$ est d'ordre 3. Au lieu d'appliquer Sarrus, on le calcule à son tour par la méthode des cofacteurs, selon sa ligne 3, qui contient deux zéros. On note $K = H_{11}$:

On met en évidence la ligne 3 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté k_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans K ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} k_{31} = 0 &\longrightarrow c_{31} \text{ : inutile à calculer} \\ k_{32} = 1 &\longrightarrow c_{32} = (-1)^{3+2} \times \det(K_{32}) \\ k_{33} = 0 &\longrightarrow c_{33} \text{ : inutile à calculer} \end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(K) = k_{31}\, c_{31} + k_{32}\, c_{32} \; + \; k_{33}\, c_{33}$$

Comme k_{31}, k_{33} sont nuls, les produits $k_{31}\, c_{31}$, $k_{33}\, c_{33}$ sont nuls **quelle que soit la valeur des cofacteurs** : il est inutile de les calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det(K) = k_{32}\, c_{32}$$

Cofacteur c_{32} (associé à $k_{32} = 1$). On supprime la ligne 3 et la colonne 2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow K_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(K_{32}) = 2 \times 1 - 3 \times (-1) = 2 - (-3) \;=\; 5$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \times 5 = (-1) \times 5 = -5 \qquad \Longrightarrow \qquad k_{32}\, c_{32} = 1 \times (-5) \;=\; -5$$

Un seul produit est non nul :

$$\det(K) = \boxed{-5}$$

On revient au déterminant de H :

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(H_{11}) = -5 \qquad \Longrightarrow \qquad \det(H) = 3 \times (-5) \;=\; \boxed{-15}$$

$\det(H) = -15 \neq 0$: la matrice H est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Remarque

Une matrice d'ordre 4 se ramène à des mineurs d'ordre 3, eux-mêmes ramenés à des mineurs d'ordre 2 : c'est le principe de la méthode des cofacteurs, valable pour tout ordre.

Corrigé de l'exercice 20 — cas particuliers

Rappelons les matrices de l'énoncé :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice T (triangulaire supérieure)

On met en évidence la colonne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté t_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans T ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & 5 & -1 \\ & 3 & 4 \\ & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$t_{11} = 2 \longrightarrow c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(T_{11})$$
$$t_{21} = 0 \longrightarrow c_{21} : \text{inutile à calculer}$$
$$t_{31} = 0 \longrightarrow c_{31} : \text{inutile à calculer}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(T) = t_{11}\, c_{11} + t_{21}\, c_{21} \; + \; t_{31}\, c_{31}$$

Comme t_{21}, t_{31} sont nuls, les produits $t_{21}\, c_{21}$, $t_{31}\, c_{31}$ sont nuls **quelle que soit la valeur des cofacteurs** : il est inutile de les calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det(T) = t_{11}\, c_{11}$$

Cofacteur c_{11} (associé à $t_{11} = 2$). On supprime la ligne 1 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(T_{11}) = 3 \times (-1) - 4 \times 0 = -3 - 0 \; = \; -3$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times (-3) = 1 \times (-3) = -3 \qquad \Longrightarrow \qquad t_{11}\, c_{11} = 2 \times (-3) \; = \; -6$$

Un seul produit est non nul :

$$\det(T) = \boxed{-6}$$

On retrouve le produit des coefficients diagonaux : $2 \times 3 \times (-1) = -6$.

$\det(T) = -6 \neq 0$: la matrice T est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Matrice L (triangulaire inférieure)

On met en évidence la ligne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté l_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans L ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix}} \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{11} = 1 &\longrightarrow c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(L_{11}) \\ l_{12} = 0 &\longrightarrow c_{12} : \text{inutile à calculer} \\ l_{13} = 0 &\longrightarrow c_{13} : \text{inutile à calculer} \end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(L) = l_{11}\, c_{11} + l_{12}\, c_{12} \; + \; l_{13}\, c_{13}$$

Comme l_{12}, l_{13} sont nuls, les produits $l_{12}\, c_{12}$, $l_{13}\, c_{13}$ sont nuls **quelle que soit la valeur des cofacteurs** : il est inutile de les calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det(L) = l_{11}\, c_{11}$$

Cofacteur c_{11} (associé à $l_{11} = 1$). On supprime la ligne 1 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow L_{11} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(L_{11}) = (-2) \times 5 - 0 \times 7 = -10 - 0 \; = \; -10$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times (-10) = 1 \times (-10) = -10 \qquad \Longrightarrow \qquad l_{11}\, c_{11} = 1 \times (-10) \; = \; -10$$

Un seul produit est non nul :

$$\det(L) = \boxed{-10}$$

On retrouve le produit des coefficients diagonaux : $1 \times (-2) \times 5 = -10$.

$\det(L) = -10 \neq 0$: la matrice L est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Matrice Δ (diagonale)

On met en évidence la ligne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté δ_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans Δ ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} = 3 &\longrightarrow c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(\Delta_{11}) \\ \delta_{12} = 0 &\longrightarrow c_{12} : \text{inutile à calculer} \\ \delta_{13} = 0 &\longrightarrow c_{13} : \text{inutile à calculer} \end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(\Delta) = \delta_{11}\, c_{11} + \delta_{12}\, c_{12} \; + \; \delta_{13}\, c_{13}$$

Comme δ_{12}, δ_{13} sont nuls, les produits $\delta_{12}\, c_{12}$, $\delta_{13}\, c_{13}$ sont nuls **quelle que soit la valeur des cofacteurs** : il est inutile de les calculer. C'est tout l'intérêt de choisir la ligne ou la colonne qui contient **le plus de zéros** : chaque zéro évite le calcul d'un cofacteur, donc du temps et des risques d'erreur.

$$\det(\Delta) = \delta_{11}\, c_{11}$$

Cofacteur c_{11} (associé à $\delta_{11} = 3$). On supprime la ligne 1 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Delta_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\Delta_{11}) = 2 \times 4 - 0 \times 0 = 8 - 0 \; = \; 8$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times 8 = 1 \times 8 = 8 \qquad \Longrightarrow \qquad \delta_{11}\, c_{11} = 3 \times 8 \; = \; 24$$

Un seul produit est non nul :

$$\det(\Delta) = \boxed{24}$$

On retrouve le produit des coefficients diagonaux : $3 \times 2 \times 4 = 24$.

$\det(\Delta) = 24 \neq 0$: la matrice Δ est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Règle de calcul : matrices triangulaires et diagonales

Le déterminant d'une matrice **triangulaire** (supérieure ou inférieure) ou **diagonale** est égal au **produit des coefficients de sa diagonale principale**. Il n'y a ni Sarrus ni cofacteurs à calculer.

Matrice U (triangulaire supérieure d'ordre 4) : application directe de la règle

U est triangulaire supérieure : tous les coefficients situés au-dessous de la diagonale sont nuls. On applique directement la règle :

$$\det(U) = 2 \times (-1) \times 3 \times 2 \;=\; \boxed{-12}$$

Avec la méthode des cofacteurs, il aurait fallu développer trois fois de suite selon la première colonne.

$\det(U) = -12 \neq 0$: la matrice U est **inversible** (on dit aussi **régulière**).

Cas de la matrice identité

La matrice identité I_n est diagonale, avec des 1 sur la diagonale : $\det(I_n) = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1$. Elle est donc toujours inversible.

Remarque

Le déterminant d'une matrice **triangulaire** (supérieure ou inférieure) ou **diagonale** est égal au **produit de ses coefficients diagonaux**. Il suffit donc qu'un seul coefficient diagonal soit nul pour que la matrice soit singulière.

Corrigé de l'exercice 21

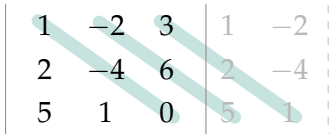
cas particuliers

Rappelons les matrices de l'énoncé :

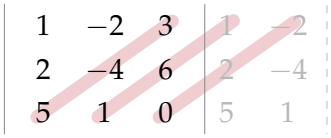
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

Matrice P : deux lignes proportionnelles

La ligne 2 est le double de la ligne 1. On calcule le déterminant par Sarrus : On recopie, dans l'ordre, les deux premières colonnes de P à droite de la matrice (en gris). On obtient trois diagonales descendantes (en vert) et trois diagonales ascendantes (en rouge) :



diagonales descendantes : $+$



diagonales ascendantes : $-$

Somme des produits des diagonales descendantes :

$$D = 1 \times (-4) \times 0 + (-2) \times 6 \times 5 + 3 \times 2 \times 1 = 0 - 60 + 6 \;=\; \mathbf{-54}$$

Somme des produits des diagonales ascendantes :

$$M = 5 \times (-4) \times 3 + 1 \times 6 \times 1 + 0 \times 2 \times (-2) = -60 + 6 + 0 \;=\; \mathbf{-54}$$

Le déterminant est la différence entre ces deux sommes :

$$\det(P) = D - M = -54 - (-54) \;=\; \boxed{0}$$

$\det(P) = 0$: la matrice P est **non inversible** (on dit aussi **singulière**).

Matrice Z : une ligne nulle

On développe selon la ligne 3, qui ne contient que des zéros :

$$\det(Z) = a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33} = 0 \times c_{31} + 0 \times c_{32} + 0 \times c_{33} \;=\; \boxed{0}$$

Aucun cofacteur n'est à calculer.

> $\det(Z) = 0$: la matrice Z est **non inversible** (on dit aussi **singulière**).

Matrice Q : deux colonnes proportionnelles

La colonne 3 est égale à la colonne 1 multipliée par -3. On calcule le déterminant par les cofacteurs : On met en évidence la ligne 1 dans la matrice, puis on réécrit ses éléments verticalement. Chaque élément sélectionné est noté q_{ij}, où i et j indiquent sa ligne et sa colonne dans Q ; en face, on écrit son cofacteur c_{ij}, qui porte les mêmes indices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-3} \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} q_{11} = 1 \quad &\longrightarrow \quad c_{11} = (-1)^{1+1} \times \det(Q_{11}) \\ q_{12} = 2 \quad &\longrightarrow \quad c_{12} = (-1)^{1+2} \times \det(Q_{12}) \\ q_{13} = -3 \quad &\longrightarrow \quad c_{13} = (-1)^{1+3} \times \det(Q_{13}) \end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est la **somme des produits de chaque élément sélectionné par son cofacteur** :

$$\det(Q) = q_{11}\,c_{11} + q_{12}\,c_{12} \;+\; q_{13}\,c_{13}$$

Cofacteur c_{11} (associé à $q_{11} = 1$). On supprime la ligne 1 et la colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q_{11}) = 0 \times (-9) - 6 \times 4 = 0 - 24 \;=\; -24$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times (-24) = 1 \times (-24) = -24 \qquad \Longrightarrow \qquad q_{11}\,c_{11} = 1 \times (-24) \;=\; -24$$

Cofacteur c_{12} (associé à $q_{12} = 2$). On supprime la ligne 1 et la colonne 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q_{12} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q_{12}) = (-2) \times (-9) - 6 \times 3 = 18 - 18 \;=\; 0$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \times 0 = (-1) \times 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q_{12}\,c_{12} = 2 \times 0 \;=\; 0$$

Cofacteur c_{13} (associé à $q_{13} = -3$). On supprime la ligne 1 et la colonne 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q_{13} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q_{13}) = (-2) \times 4 - 0 \times 3 = -8 - 0 \;=\; -8$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \times (-8) = 1 \times (-8) = -8 \qquad \Longrightarrow \qquad q_{13}\, c_{13} = (-3) \times (-8) \;=\; 24$$

On additionne les produits :

$$\det(Q) = -24 + 0 + 24 \;=\; \boxed{0}$$

$\det(Q) = 0$: la matrice Q est **non inversible** (on dit aussi **singulière**).

Remarque

Une matrice qui a une **ligne (ou une colonne) nulle**, ou **deux lignes (ou deux colonnes) proportionnelles**, a un déterminant nul : elle est singulière. Repérer ces situations évite des calculs.

Bilan de la série

Ce qu'il faut retenir

— **Ordre 2** : $\det(A) = a \times d - c \times b$, en faisant très attention aux signes.

— Le déterminant d'une matrice qui ne contient qu'un seul nombre est égal à ce nombre.

— **Ordre 3** : la règle de Sarrus (diagonales descendantes moins diagonales ascendantes), uniquement pour l'ordre 3.

— **Tout ordre** : la méthode des cofacteurs, en développant selon la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros ; $c_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det(A_{ij})$.

— La **trace** d'une matrice carrée est la **somme** de ses coefficients diagonaux.

— **Règle des cas particuliers** : le déterminant d'une matrice **triangulaire** ou **diagonale** est le **produit** de ses coefficients diagonaux ; $\det(I_n) = 1$.

— Une ligne (ou une colonne) nulle, ou deux lignes (ou deux colonnes) proportionnelles, donnent un déterminant nul.

— $\det(A) \neq 0$: A est inversible (régulière) ; $\det(A) = 0$: A est singulière.

Récapitulatif des résultats

Ex.	Thème	Résultat
1	La trace d'une matrice carrée	$tr(A) = 13$, $tr(B) = 2$, $tr(I_4) = 4$; $tr(C)$ n'existe pas
2	Ordre 2, coefficients positifs	$\det(A) = 2$: inversible
3	Ordre 2, coefficients négatifs	$\det(B) = -2$: inversible
4	Ordre 2, un cas singulier	$\det(C) = 0$: singulière
5	Ordre 2, avec un paramètre	$\det(D) = 6m - 12$: singulière si et seulement si $m = 2$
6	Sarrus, colonnes recopiées à droite	$\det(A) = 25$: inversible
7	Sarrus, colonnes recopiées à droite	$\det(B) = 17$: inversible
8	Sarrus, lignes recopiées en dessous	$\det(C) = 8$: inversible
9	Sarrus, lignes recopiées en dessous : un cas singulier	$\det(D) = 0$: singulière
10	Mineurs et cofacteurs de la ligne 1	$\det(A) = 72$: inversible
11	Mineurs et cofacteurs de la colonne 2	$\det(B) = 7$: inversible
12	Les neuf cofacteurs d'une matrice d'ordre 3	$\det(F) = -24$: inversible
13	Développement selon une ligne	$\det(A) = 41$: inversible
14	Développement selon une colonne	$\det(B) = 44$: inversible
15	Sarrus et cofacteurs : deux méthodes, un seul résultat	$\det(G) = 22$: inversible
16	Une matrice avec beaucoup de zéros	$\det(D) = 0$: singulière
17	Ordre 4 : une ligne avec trois zéros	$\det(A) = 65$: inversible
18	Ordre 4 : une colonne avec deux zéros	$\det(B) = 70$: inversible
19	Ordre 4 : cofacteurs en cascade	$\det(H) = -15$: inversible
20	Matrices triangulaires et diagonale	$\det(T) = -6$: inversible ; $\det(L) = -10$: inversible ; $\det(\Delta) = 24$: inversible ; $\det(U) = -12$: inversible
21	Déterminants nuls : lignes ou colonnes proportionnelles, ligne nulle	$\det(P) = 0$: singulière ; $\det(Z) = 0$: singulière ; $\det(Q) = 0$: singulière

Partie 3 : Quand les calculs se compliquent, MATLAB

▶ Les limites du calcul à la main

Les méthodes de cette série sont indispensables pour comprendre ce qu'est un déterminant. Mais leur coût augmente très vite avec l'ordre de la matrice. Sans zéro pour simplifier, le développement complet d'un déterminant d'ordre n fait intervenir un très grand nombre de produits :

Ordre de la matrice	2	3	4	5	6	10
Nombre de produits à calculer	2	6	24	120	720	3 628 800

Pourquoi passer par un logiciel ?

— **Le calcul devient fastidieux** : à partir de l'ordre 4 ou 5, et sans zéros bien placés, le calcul à la main prend un temps considérable.

— **Le risque d'erreur devient trop élevé** : une seule erreur de signe dans un mineur fausse tout le résultat, et donc la conclusion sur l'inversibilité de la matrice.

— **En gestion, les matrices sont grandes** : dix produits, vingt centres d'analyse ou trente postes budgétaires donnent des matrices d'ordre 10, 20 ou 30.

Dès que les choses commencent à se compliquer, il faut donc passer par un logiciel de calcul comme **MATLAB** (ou ses équivalents gratuits Octave et Python). Le rôle de l'étudiant reste essentiel : savoir **ce que l'on calcule** et **interpréter le résultat**.

▶ Calculer un déterminant avec MATLAB

On écrit la matrice ligne par ligne, entre crochets, en séparant les lignes par un point-virgule ; la fonction `det` renvoie son déterminant.

Script MATLAB : déterminants de la série

```
% Exercice 6 : matrice d'ordre 3
A = [2 1 3; 0 4 1; 1 2 5];
dA = round(det(A))
tA = trace(A)              % trace : somme des coefficients diagonaux

% Exercice 18 : matrice d'ordre 4
B = [1 0 2 -1; 3 2 0 1; 0 1 4 2; 2 0 1 3];
dB = round(det(B))

% Exercice 9 : matrice singulière
D = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
dD = round(det(D))

% Une matrice d'ordre 6 : 720 produits à la main !
M = [ 5  1  2  4  1  3;
      4 -3 -5 -2 -2  4;
      5 -5  0  4 -4  3;
     -4  0  3 -2 -2 -2;
      2 -3  5 -1  0  0;
      1  1  0  5  3  3];
```

```
21 dM = round(det(M))
```

Résultat affiché par MATLAB

```
dA = 25
tA = 11
dB = 70
dD = 0
dM = 15494
```

Comment lire ce résultat

— On retrouve en une fraction de seconde les résultats des exercices 6, 18 et 9 : $\det(A) = 25$, $\det(B) = 70$ et $\det(D) = 0$. La fonction `trace` donne $tr(A) = 2 + 4 + 5 = 11$.

— Pour la matrice M d'ordre 6, $\det(M) = 15\,494 \neq 0$: M est inversible. À la main, ce calcul aurait demandé 720 produits.

— MATLAB calcule avec des nombres décimaux : sans `round`, il peut afficher par exemple `24.9999` au lieu de 25, ou un nombre minuscule comme `6.6613e-16` au lieu de 0. Lorsque la matrice ne contient que des nombres entiers, `round` arrondit le résultat à l'entier le plus proche.