Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger

SÉRIE 5

SÉRIE D'EXERCICES CORRIGÉS

L'algorithme de Gauss et le rang

Calcul du rang d'une matrice par réduction à sa forme échelonnée en lignes

OBJECTIF

Réduire une matrice à sa forme échelonnée en lignes par l'algorithme de Gauss, une opération élémentaire à la fois, puis en déduire son rang.

20 exercices progressifs · Corrigés détaillés pas à pas · Matrices carrées et rectangulaires

AU SOMMAIRE

Partie 1 **Énoncés** rappels du cours et 20 matrices à échelonner

Partie 2 **Corrigés détaillés** chaque transformation expliquée et calculée

Bilan **Ce qu'il faut retenir** et récapitulatif des rangs

Partie 3 **MATLAB** quand les calculs se compliquent

MODULE	PROFESSEUR	ANNÉE UNIVERSITAIRE
Mathématiques pour la gestion	**Jaouad Madkour**	**2026–2027**

Partie 1 : Énoncés

▶ Rappels du cours

Le chapitre 1 a forgé l'outil : le calcul matriciel. Le chapitre 2 aborde l'objectif du cours, la résolution des systèmes linéaires. Tout système s'écrit sous la forme $AX = B$, et sa résolution commence toujours par la même étape : échelonner la matrice par l'algorithme de Gauss. Cette série présente cet algorithme et en tire le rang d'une matrice, qui servira dans toutes les séries suivantes.

Les trois opérations élémentaires sur les lignes

O_1	Permuter deux lignes de la matrice	$L_i \leftrightarrow L_j$
O_2	Multiplier une ligne par une constante *non nulle* α	$\alpha\, L_i \quad (\alpha \neq 0)$
O_3	Ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne	$L_i + \beta\, L_j \quad (j \neq i)$

Principes de l'algorithme de Gauss

1. Transformer entièrement une colonne avant de passer à la colonne suivante.
2. Travailler sur les colonnes dans l'ordre, de gauche à droite.
3. Permuter deux lignes de la matrice lorsqu'un élément à utiliser comme pivot est nul (O_1).
4. Ne jamais utiliser une opération qui modifie un zéro dans une colonne déjà transformée.
5. Ne jamais utiliser la ligne numéro i de la matrice après avoir transformé sa colonne numéro i.

Un pivot est **non nul**, **de préférence égal à** 1 (on l'y ramène avec O_2). Les zéros sous chaque pivot sont obtenus à l'aide de l'opération O_3.

Rang d'une matrice

La forme échelonnée en lignes d'une matrice A est notée A_e (l'indice e signifie « échelonnée »). Le **rang** de A est le **nombre de lignes non nulles de** A_e.

Consigne commune

Pour chacune des matrices suivantes, **déterminer le rang** en la réduisant à sa forme échelonnée en lignes par l'algorithme de Gauss. Effectuer **une seule opération élémentaire à la fois**, en précisant à chaque étape la transformation réalisée et son code (O_1, O_2 ou O_3). Mettre en évidence les pivots de la matrice obtenue, puis en déduire le rang.

▶ Les exercices

Exercice 1 — matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 5 →

Exercice 2 — matrice 2×3

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 6 →

Exercice 3 — matrice 3×2

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 3 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 7 →

Exercice 4 — matrice 3×3

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 9 →

Exercice 5 — matrice 3×3

$$E = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 10 →

Exercice 6 — matrice 3×3

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 12 →

Exercice 7 — matrice 3×3

$$G = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -9 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 14 →

Exercice 8 — matrice 2×4

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 16 →

Exercice 9 — matrice 4×2

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 17 →

Exercice 10 — matrice 3×4

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & 8 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 19 →

Exercice 11 — matrice 3×4

$$L = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 21 →

Exercice 12 — matrice 4×3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 23 →

Exercice 13 matrice 4×3

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & 8 \\ -6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 25 →

Exercice 14 matrice 3×3

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 27 →

Exercice 15 matrice 4×4

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -6 \\ 2 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 29 →

Exercice 16 matrice 4×4

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 31 →

Exercice 17 matrice 3×5

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -2 & -4 \\ 4 & -7 & 0 & -7 & -8 \\ -2 & 2 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 34 →

Exercice 18 matrice 5×3

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 36 →

Exercice 19 matrice 4×5

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -7 & -3 & -8 \\ -2 & -1 & -5 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 40 →

Exercice 20 matrice 4×4

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

corrigé p. 42 →

Partie 2 : Corrigés détaillés

Conventions de lecture

— Les lignes de chaque matrice sont notées $L_1, L_2, L_3, \ldots$ selon leur position dans la matrice *actuelle* : après chaque étape, la numérotation repart de L_1.

— Au-dessus de chaque flèche figure la transformation effectuée ; en dessous, le code de l'opération élémentaire (O_1, O_2 ou O_3).

— Chaque nouvelle ligne est calculée **coefficient par coefficient**, de gauche à droite.

$\boxed{2}$ pivot en cours d'utilisation (encadré en bleu)

$\textcircled{-3}$ nombre à annuler (entouré en orange)

1 pivot de la forme échelonnée obtenue (en rouge)

Corrigé de l'exercice 1

matrice 2×2

Rappelons la matrice à échelonner :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 1. Pour annuler le 1 de L_2, on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ \textcircled{1} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 - L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-1 - 1 \times 1 = -2$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. Il ne reste plus que la ligne L_2 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 2. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_2 : la colonne 2 est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Conclusion de l'exercice 1

La forme échelonnée en lignes de A, notée A_e (pivots en rouge), est

$$A_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Les 2 lignes de A_e sont non nulles, donc

$$\operatorname{rang}(A) = 2$$

Corrigé de l'exercice 2

matrice 2×3

Rappelons la matrice à échelonner :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 3 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{3} & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$; $\frac{1}{3} \times (-3) = -1$; $\frac{1}{3} \times (-6) = -2$.

Transformation 2. Pour annuler le -3 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 trois fois la ligne L_1 (car $-3 + 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -2 \\ \textcircled{-3} & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 + 3L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $-3 + 3 \times 1 = 0$; $5 + 3 \times (-1) = 2$; $4 + 3 \times (-2) = -2$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. Il ne reste plus que la ligne L_2 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_2 : la colonne 2 est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Conclusion de l'exercice 2

La forme échelonnée en lignes de B, notée B_e (pivots en rouge), est

$$B_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix}$$

Les 2 lignes de B_e sont non nulles, donc

$$\operatorname{rang}(B) = 2$$

Corrigé de l'exercice 3

matrice 3×2

Rappelons la matrice à échelonner :

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 3 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} \boxed{-2} & 0 \\ -2 & 3 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times 0 = 0$.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ \textcircled{-2} & 3 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 + 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $3 + 2 \times 0 = 3$.

Transformation 3. Pour annuler le -4 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 quatre fois la ligne L_1 (car $-4+4\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0\\ 0 & 3\\ \textcircled{-4} & -9\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_3+4L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\\ 0 & -9\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-4+4\times 1=0$; $-9+4\times 0=-9$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 3 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boxed{3}\\ 0 & -9\end{pmatrix}\xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & -9\end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{3}\times 3=1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 5. Pour annuler le -9 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 neuf fois la ligne L_2 (car $-9+9\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \boxed{1}\\ 0 & \textcircled{-9}\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_3+9L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-9+9\times 1=0$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. La ligne L_3 est entièrement nulle : elle ne peut plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Conclusion de l'exercice 3

La forme échelonnée en lignes de C, notée C_e (pivots en rouge), est

$$C_e=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

La matrice C_e contient 2 lignes non nulles et 1 ligne nulle, donc

$$\operatorname{rang}(C)=2$$

Corrigé de l'exercice 4 — matrice 3×3

Rappelons la matrice à échelonner :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 1. Pour annuler le -2 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ \textcircled{-2} & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 + 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $-3 + 2 \times 1 = -1$; $-1 + 2 \times 1 = 1$.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \textcircled{2} & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $0 - 2 \times 1 = -2$; $6 - 2 \times 1 = 4$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par -1.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 1 = -1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 4. Pour annuler le -2 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & \textcircled{-2} & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 + 2L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $4 + 2 \times (-1) = 2$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : la colonne 3 est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Conclusion de l'exercice 4

La forme échelonnée en lignes de D, notée D_e (pivots en rouge), est

$$D_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Les 3 lignes de D_e sont non nulles, donc

$$\operatorname{rang}(D) = 3$$

Corrigé de l'exercice 5

matrice 3×3

Rappelons la matrice à échelonner :

$$E = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 3 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} \boxed{3} & -6 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -9 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$; $\frac{1}{3} \times (-6) = -2$; $\frac{1}{3} \times 0 = 0$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_2, on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 \\ \textcircled{1} & -3 & -1 \\ 3 & -9 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 - L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-3 - 1 \times (-2) = -1$; $-1 - 1 \times 0 = -1$.

Transformation 3. Pour annuler le 3 de L_3, on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \textcircled{3} & -9 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $3 - 3 \times 1 = 0$; $-9 - 3 \times (-2) = -3$; $-1 - 3 \times 0 = -1$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par -1.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times (-1) = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 5. Pour annuler le -3 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $-3 + 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & \textcircled{-3} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 + 3L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-3 + 3 \times 1 = 0$; $-1 + 3 \times 1 = 2$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : la colonne 3 est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Conclusion de l'exercice 5

La forme échelonnée en lignes de E, notée E_e (pivots en rouge), est

$$E_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Les 3 lignes de E_e sont non nulles, donc

$$\boxed{\operatorname{rang}(E) = 3}$$

Corrigé de l'exercice 6

matrice 3×3

Rappelons la matrice à échelonner :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans cette colonne vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_2 (coefficient 1). On échange donc L_1 et L_2.

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Le coefficient de L_2 dans la colonne 1 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 2. Pour annuler le 3 de L_3, on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ \textcircled{3} & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $3 - 3 \times 1 = 0$; $-1 - 3 \times (-1) = 2$; $7 - 3 \times 3 = -2$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 0 = 0$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 4. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \textcircled{2} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-2 - 2 \times 0 = -2$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : la colonne 3 est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Conclusion de l'exercice 6

La forme échelonnée en lignes de F, notée F_e (pivots en rouge), est

$$F_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Les 3 lignes de F_e sont non nulles, donc

$$\operatorname{rang}(F) = 3$$

Corrigé de l'exercice 7

matrice 3×3

Rappelons la matrice à échelonner :

$$G = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -9 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut -3 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $-\frac{1}{3}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{-3} & -3 & -9 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{3}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $-\frac{1}{3} \times (-3) = 1$; $-\frac{1}{3} \times (-3) = 1$; $-\frac{1}{3} \times (-9) = 3$.

Transformation 2. Pour annuler le -1 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $-1 + 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 \\ \textcircled{-1} & -3 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 + L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $-1 + 1 \times 1 = 0$; $-3 + 1 \times 1 = -2$; $1 + 1 \times 3 = 4$.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 3\\ 0 & -2 & 4\\ \textcircled{-2} & -3 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_3+2L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-2+2\times 1=0$; $-3+2\times 1=-1$; $-4+2\times 3=2$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & \boxed{-2} & 4\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times 4=-2$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 5. Pour annuler le -1 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & \boxed{1} & -2\\ 0 & \textcircled{-1} & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_3+L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-1+1\times 1=0$; $2+1\times(-2)=0$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. La ligne L_3 est entièrement nulle : elle ne peut plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Conclusion de l'exercice 7

La forme échelonnée en lignes de G, notée G_e (pivots en rouge), est

$$G_e=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 1 & 3\\ 0 & \mathbf{1} & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

La matrice G_e contient 2 lignes non nulles et 1 ligne nulle, donc

$$\operatorname{rang}(G)=2$$

Corrigé de l'exercice 8

matrice 2×4

Rappelons la matrice à échelonner :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans cette colonne vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_2 (coefficient 2). On échange donc L_1 et L_2.

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 2. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 4 = 2$; $\frac{1}{2} \times 0 = 0$; $\frac{1}{2} \times 6 = 3$.

Le coefficient de L_2 dans la colonne 1 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. Il ne reste plus que la ligne L_2 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Il n'y a plus de ligne sous L_2 : la colonne 2 est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Conclusion de l'exercice 8

La forme échelonnée en lignes de H, notée H_e (pivots en rouge), est

$$H_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Les 2 lignes de H_e sont non nulles, donc

$$\operatorname{rang}(H) = 2$$

Corrigé de l'exercice 9

matrice 4×2

Rappelons la matrice à échelonner :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par -1.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times (-4) = 4$.

Le coefficient de L_2 dans la colonne 1 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3, on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 \\ 0 & 2 \\ \textcircled{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $1 - 1 \times 1 = 0$; $2 - 1 \times 4 = -2$.

Transformation 3. Pour annuler le 3 de L_4, on retranche à la ligne L_4 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \\ \textcircled{3} & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4 - 3L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $3 - 3 \times 1 = 0$; $4 - 3 \times 4 = -8$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 4. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & \boxed{2} \\ 0 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 5. Pour annuler le -2 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & (-2) \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 + 2L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-2 + 2 \times 1 = 0$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

Transformation 6. Pour annuler le -8 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 huit fois la ligne L_2 (car $-8 + 8 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & (-8) \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4 + 8L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $-8 + 8 \times 1 = 0$.

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. Les lignes L_3, L_4 sont entièrement nulles : elles ne peuvent plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Conclusion de l'exercice 9

La forme échelonnée en lignes de J, notée J_e (pivots en rouge), est

$$J_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 \\ 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice J_e contient 2 lignes non nulles et 2 lignes nulles, donc

$$\operatorname{rang}(J) = 2$$

Corrigé de l'exercice 10

matrice 3×4

Rappelons la matrice à échelonner :

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & 8 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 1. Pour annuler le 1 de L_2, on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & -3 \\ \textcircled{1} & 4 & -3 & -1 \\ 3 & 8 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 - L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $1 - 1 \times 1 = 0$; $4 - 1 \times 2 = 2$; $-3 - 1 \times (-1) = -2$; $-1 - 1 \times (-3) = 2$.

Transformation 2. Pour annuler le 3 de L_3, on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_1 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ \textcircled{3} & 8 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $3 - 3 \times 1 = 0$; $8 - 3 \times 2 = 2$; $-6 - 3 \times (-1) = -3$; $-4 - 3 \times (-3) = 5$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 3. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 4. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & (2) & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-3 - 2 \times (-1) = -1$; $5 - 2 \times 1 = 3$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par -1.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par -1.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 3 = -3$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : la colonne 3 est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Conclusion de l'exercice 10

La forme échelonnée en lignes de K, notée K_e (pivots en rouge), est

$$K_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{pmatrix}$$

Les 3 lignes de K_e sont non nulles, donc

$$\operatorname{rang}(K) = 3$$

Corrigé de l'exercice 11

matrice 3×4

Rappelons la matrice à échelonner :

$$L = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times (-4) = 2$; $-\frac{1}{2} \times 6 = -3$; $-\frac{1}{2} \times 0 = 0$.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_2, on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 0 \\ \textcircled{2} & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $4 - 2 \times 2 = 0$; $-8 - 2 \times (-3) = -2$; $-4 - 2 \times 0 = -4$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ \textcircled{2} & 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $6 - 2 \times 2 = 2$; $-6 - 2 \times (-3) = 0$; $2 - 2 \times 0 = 2$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le coefficient de L_2 dans cette colonne vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_3 (coefficient 2). On échange donc L_2 et L_3. Les deux lignes commencent par des zéros dans les colonnes déjà traitées : la permutation ne détruit aucun zéro.

Transformation 4. Permutation des lignes L_2 et L_3.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_1]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times 0 = 0$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Le coefficient de L_3 dans la colonne 2 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$; $-\frac{1}{2} \times (-4) = 2$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : la colonne 3 est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Conclusion de l'exercice 11

La forme échelonnée en lignes de L, notée L_e (pivots en rouge), est

$$L_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

Les 3 lignes de L_e sont non nulles, donc

$$\operatorname{rang}(L) = 3$$

Corrigé de l'exercice 12

matrice 4×3

Rappelons la matrice à échelonner :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 1. Pour annuler le 1 de L_2, on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -3 \\ \textcircled{1} & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 - L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-1 - 1 \times (-1) = 0$; $-2 - 1 \times (-3) = 1$.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \textcircled{2} & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-2 - 2 \times (-1) = 0$; $-1 - 2 \times (-3) = 5$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_4, on retranche à la ligne L_4 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ \textcircled{2} & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4 - 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-1 - 2 \times (-1) = 1$; $-4 - 2 \times (-3) = 2$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le coefficient de L_2 dans cette colonne vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_4 (coefficient 1). On échange donc L_2 et L_4. Les deux lignes commencent par des zéros dans les colonnes déjà traitées : la permutation ne détruit aucun zéro.

Transformation 4. Permutation des lignes L_2 et L_4.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_1]{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Le coefficient de L_3 dans la colonne 2 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Le coefficient de L_4 dans la colonne 2 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut 5 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $\frac{1}{5}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{5}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{5}L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{5} \times 5 = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 6. Pour annuler le 1 de L_4, on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_3 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4 - L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $1 - 1 \times 1 = 0$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

La colonne 3 est terminée ; la ligne L_3 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. La ligne L_4 est entièrement nulle : elle ne peut plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Conclusion de l'exercice 12

La forme échelonnée en lignes de M, notée M_e (pivots en rouge), est

$$M_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice M_e contient 3 lignes non nulles et 1 ligne nulle, donc

$$\operatorname{rang}(M) = 3$$

Corrigé de l'exercice 13

matrice 4×3

Rappelons la matrice à échelonner :

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & 8 \\ -6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & 2 \\ 4 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & 8 \\ -6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & 8 \\ -6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

Transformation 2. Pour annuler le 4 de L_2, on retranche à la ligne L_2 quatre fois la ligne L_1 (car $4 - 4 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ \textcircled{4} & -6 & -2 \\ 2 & 0 & 8 \\ -6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 - 4L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 8 \\ -6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $4 - 4 \times 1 = 0$; $-6 - 4 \times (-1) = -2$; $-2 - 4 \times 1 = -6$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{1} & -1 & 1\\ 0 & -2 & -6\\ \textcircled{2} & 0 & 8\\ -6 & 8 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_3-2L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -6\\ 0 & 2 & 6\\ -6 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $2-2\times 1=0$; $0-2\times(-1)=2$; $8-2\times 1=6$.

Transformation 4. Pour annuler le -6 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 six fois la ligne L_1 (car $-6+6\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{1} & -1 & 1\\ 0 & -2 & -6\\ 0 & 2 & 6\\ \textcircled{-6} & 8 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_4+6L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -6\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $-6+6\times 1=0$; $8+6\times(-1)=2$; $0+6\times 1=6$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_2 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & \boxed{-2} & -6\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $-\frac{1}{2}\times(-2)=1$; $-\frac{1}{2}\times(-6)=3$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 6. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & \boxed{1} & 3\\ 0 & \textcircled{2} & 6\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_3-2L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $2-2\times 1=0$; $6-2\times 3=0$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

Transformation 7. Pour annuler le 2 de L_4, on retranche à la ligne L_4 deux fois la ligne L_2 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{2} & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4 - 2L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $6 - 2 \times 3 = 0$.

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. Les lignes L_3, L_4 sont entièrement nulles : elles ne peuvent plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Conclusion de l'exercice 13

La forme échelonnée en lignes de N, notée N_e (pivots en rouge), est

$$N_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice N_e contient 2 lignes non nulles et 2 lignes nulles, donc

$$\operatorname{rang}(N) = 2$$

Corrigé de l'exercice 14

matrice 3×3

Rappelons la matrice à échelonner :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par -1.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 3 = -3$; $(-1) \times 2 = -2$.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_2, on retranche à la ligne L_2 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ \textcircled{1} & -3 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 - L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-3 - 1 \times (-3) = 0$; $-2 - 1 \times (-2) = 0$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_3, on retranche à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{2} & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-6 - 2 \times (-3) = 0$; $-4 - 2 \times (-2) = 0$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. Les lignes L_2, L_3 sont entièrement nulles : elles ne peuvent plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Conclusion de l'exercice 14

La forme échelonnée en lignes de P, notée P_e (pivots en rouge), est

$$P_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice P_e contient 1 ligne non nulle et 2 lignes nulles, donc

$$\operatorname{rang}(P) = 1$$

Corrigé de l'exercice 15

matrice 4×4

Rappelons la matrice à échelonner :

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -6 \\ 2 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & -6 & -6 \\ 2 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times (-6) = -3$; $\frac{1}{2} \times (-6) = -3$.

Transformation 2. Pour annuler le 2 de L_2, on retranche à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -3 & -3 \\ \textcircled{2} & -1 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 - 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $-1 - 2 \times (-1) = 1$; $-4 - 2 \times (-3) = 2$; $-7 - 2 \times (-3) = -1$.

Le coefficient de L_3 dans la colonne 1 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_4, on retranche à la ligne L_4 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ \textcircled{2} & 1 & -1 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4 - 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $1 - 2 \times (-1) = 3$; $-1 - 2 \times (-3) = 5$; $-9 - 2 \times (-3) = -3$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 4. Pour annuler le -1 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-3&-3\\0&\boxed{1}&2&-1\\0&\textcircled{-1}&-3&0\\0&3&5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_3+L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-3&-3\\0&1&2&-1\\0&0&-1&-1\\0&3&5&-3\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-1+1\times 1=0$; $-3+1\times 2=-1$; $0+1\times(-1)=-1$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

Transformation 5. Pour annuler le 3 de L_4, on retranche à la ligne L_4 trois fois la ligne L_2 (car $3-3\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-3&-3\\0&\boxed{1}&2&-1\\0&0&-1&-1\\0&\textcircled{3}&5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_4-3L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-3&-3\\0&1&2&-1\\0&0&-1&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $3-3\times 1=0$; $5-3\times 2=-1$; $-3-3\times(-1)=0$.

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par -1.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par -1.

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-3&-3\\0&1&2&-1\\0&0&\boxed{-1}&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[O_2]{-L_3}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-3&-3\\0&1&2&-1\\0&0&1&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-1)=1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 7. Pour annuler le -1 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_3 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-3&-3\\0&1&2&-1\\0&0&\boxed{1}&1\\0&0&\textcircled{-1}&0\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_4+L_3}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-3&-3\\0&1&2&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $-1+1\times 1=0$; $0+1\times 1=1$.

La colonne 3 est terminée ; la ligne L_3 ne sera plus utilisée.

Colonne 4. Il ne reste plus que la ligne L_4 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne 4 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Il n'y a plus de ligne sous L_4 : la colonne 4 est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Conclusion de l'exercice 15

La forme échelonnée en lignes de Q, notée Q_e (pivots en rouge), est

$$Q_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & -3 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Les 4 lignes de Q_e sont non nulles, donc

$$\operatorname{rang}(Q) = 4$$

Corrigé de l'exercice 16

matrice 4×4

Rappelons la matrice à échelonner :

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par -1.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & -9 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times 1 = -1$; $(-1) \times (-1) = 1$; $(-1) \times (-3) = 3$.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}\boxed{1} & -1 & 1 & 3\\ \textcircled{-2} & 2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -4 & -2\\ 3 & -4 & -9 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_2+2L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ -1 & 0 & -4 & -2\\ 3 & -4 & -9 & -1\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $-2+2\times 1=0$; $2+2\times(-1)=0$; $1+2\times 1=3$; $-3+2\times 3=3$.

Transformation 3. Pour annuler le -1 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}\boxed{1} & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ \textcircled{-1} & 0 & -4 & -2\\ 3 & -4 & -9 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_3+L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & -1 & -3 & 1\\ 3 & -4 & -9 & -1\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-1+1\times 1=0$; $0+1\times(-1)=-1$; $-4+1\times 1=-3$; $-2+1\times 3=1$.

Transformation 4. Pour annuler le 3 de L_4, on retranche à la ligne L_4 trois fois la ligne L_1 (car $3-3\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}\boxed{1} & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & -1 & -3 & 1\\ \textcircled{3} & -4 & -9 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_4-3L_1}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & -1 & -3 & 1\\ 0 & -1 & -12 & -10\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $3-3\times 1=0$; $-4-3\times(-1)=-1$; $-9-3\times 1=-12$; $-1-3\times 3=-10$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le coefficient de L_2 dans cette colonne vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_3 (coefficient -1). On échange donc L_2 et L_3. Les deux lignes commencent par des zéros dans les colonnes déjà traitées : la permutation ne détruit aucun zéro.

Transformation 5. Permutation des lignes L_2 et L_3.

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & -1 & -3 & 1\\ 0 & -1 & -12 & -10\end{pmatrix}\xrightarrow[O_1]{L_2\leftrightarrow L_3}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & -1 & -12 & -10\end{pmatrix}$$

Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par -1.

Transformation 6. Multiplication de L_2 par -1.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -10 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times(-3)=3$; $(-1)\times 1=-1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Le coefficient de L_3 dans la colonne 2 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 7. Pour annuler le -1 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & (-1) & -12 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4+L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & -11 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $-1+1\times 1=0$; $-12+1\times 3=-9$; $-10+1\times(-1)=-11$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut 3 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $\frac{1}{3}$.

Transformation 8. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{3}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 3 \\ 0 & 0 & -9 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{3}L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -11 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{3}\times 3=1$; $\frac{1}{3}\times 3=1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 9. Pour annuler le -9 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 neuf fois la ligne L_3 (car $-9+9\times 1=0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & (-9) & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4+9L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $-9+9\times 1=0$; $-11+9\times 1=-2$.

La colonne 3 est terminée ; la ligne L_3 ne sera plus utilisée.

Colonne 4. Il ne reste plus que la ligne L_4 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_4 dans la colonne 4 : il vaut -2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_4 par $-\frac{1}{2}$.

Transformation 10. Multiplication de L_4 par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{2}L_4} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls. Il n'y a plus de ligne sous L_4 : la colonne 4 est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Conclusion de l'exercice 16

La forme échelonnée en lignes de R, notée R_e (pivots en rouge), est

$$R_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Les 4 lignes de R_e sont non nulles, donc

$$\operatorname{rang}(R) = 4$$

Corrigé de l'exercice 17

matrice 3×5

Rappelons la matrice à échelonner :

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -2 & -4 \\ 4 & -7 & 0 & -7 & -8 \\ -2 & 2 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 1. Multiplication de L_1 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} \boxed{2} & -4 & 0 & -2 & -4 \\ 4 & -7 & 0 & -7 & -8 \\ -2 & 2 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & -7 & 0 & -7 & -8 \\ -2 & 2 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$; $\frac{1}{2} \times (-4) = -2$; $\frac{1}{2} \times 0 = 0$; $\frac{1}{2} \times (-2) = -1$; $\frac{1}{2} \times (-4) = -2$.

Transformation 2. Pour annuler le 4 de L_2, on retranche à la ligne L_2 quatre fois la ligne L_1 (car $4-4\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & -1 & -2 \\ \textcircled{4} & -7 & 0 & -7 & -8 \\ -2 & 2 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2-4L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $4-4\times 1=0$; $-7-4\times(-2)=1$; $0-4\times 0=0$; $-7-4\times(-1)=-3$; $-8-4\times(-2)=0$.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ \textcircled{-2} & 2 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-2+2\times 1=0$; $2+2\times(-2)=-2$; $2+2\times 0=2$; $8+2\times(-1)=6$; $4+2\times(-2)=0$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 et L_3. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 4. Pour annuler le -2 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_2 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \textcircled{-2} & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3+2L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-2+2\times 1=0$; $2+2\times 0=2$; $6+2\times(-3)=0$; $0+2\times 0=0$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. Il ne reste plus que la ligne L_3 à traiter. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2}\times 2=1$; $\frac{1}{2}\times 0=0$; $\frac{1}{2}\times 0=0$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Il n'y a plus de ligne sous L_3 : la colonne 3 est terminée.

Fin de l'algorithme. L'algorithme est terminé.

Conclusion de l'exercice 17

La forme échelonnée en lignes de S, notée S_e (pivots en rouge), est

$$S_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les 3 lignes de S_e sont non nulles, donc

$$\operatorname{rang}(S) = 3$$

Corrigé de l'exercice 18

matrice 5×3

Rappelons la matrice à échelonner :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans cette colonne vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_3 (coefficient -1). On échange donc L_1 et L_3.

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_3.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ 2 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut -1 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_1 par -1.

Transformation 2. Multiplication de L_1 par -1.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ 2 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{-L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ 2 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $(-1)\times(-1)=1$; $(-1)\times 3=-3$; $(-1)\times 2=-2$.

Le coefficient de L_2 dans la colonne 1 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Le coefficient de L_3 dans la colonne 1 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_4, on retranche à la ligne L_4 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ \textcircled{2} & -5 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4-2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $2-2\times 1=0$; $-5-2\times(-3)=1$; $-3-2\times(-2)=1$.

Transformation 4. Pour annuler le 2 de L_5, on retranche à la ligne L_5 deux fois la ligne L_1 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \\ \textcircled{2} & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_5-2L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_5, coefficient par coefficient : $2-2\times 1=0$; $-4-2\times(-3)=2$; $-2-2\times(-2)=2$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_5. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_2 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 5. Multiplication de L_2 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2}\times 2=1$; $\frac{1}{2}\times 4=2$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 6. Pour annuler le -3 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $-3+3\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&\boxed{1}&2\\0&\textcircled{-3}&-9\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_3+3L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&2\\0&0&-3\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-3+3\times 1=0$; $-9+3\times 2=-3$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0-\cdots\times 0=0$, ces zéros sont donc préservés.)

Transformation 7. Pour annuler le 1 de L_4, on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_2 (car $1-1\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&\boxed{1}&2\\0&0&-3\\0&\textcircled{1}&1\\0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_4-L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&2\\0&0&-3\\0&0&-1\\0&2&2\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $1-1\times 1=0$; $1-1\times 2=-1$.

Transformation 8. Pour annuler le 2 de L_5, on retranche à la ligne L_5 deux fois la ligne L_2 (car $2-2\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&\boxed{1}&2\\0&0&-3\\0&0&-1\\0&\textcircled{2}&2\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_5-2L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&2\\0&0&-3\\0&0&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_5, coefficient par coefficient : $2-2\times 1=0$; $2-2\times 2=-2$.

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 à L_5. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut -3 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $-\frac{1}{3}$.

Transformation 9. Multiplication de L_3 par $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&2\\0&0&\boxed{-3}\\0&0&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[O_2]{-\frac{1}{3}L_3}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $-\frac{1}{3}\times(-3)=1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 10. Pour annuler le -1 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_3 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&2\\0&0&\boxed{1}\\0&0&\textcircled{-1}\\0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_4+L_3}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $-1+1\times 1=0$.

Transformation 11. Pour annuler le -2 de L_5, on ajoute à la ligne L_5 deux fois la ligne L_3 (car $-2+2\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&2\\0&0&\boxed{1}\\0&0&0\\0&0&\textcircled{-2}\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_5+2L_3}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_5, coefficient par coefficient : $-2+2\times 1=0$.

La colonne 3 est terminée ; la ligne L_3 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. Les lignes L_4, L_5 sont entièrement nulles : elles ne peuvent plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Conclusion de l'exercice 18

La forme échelonnée en lignes de T, notée T_e (pivots en rouge), est

$$T_e=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&-3&-2\\0&\mathbf{1}&2\\0&0&\mathbf{1}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

La matrice T_e contient 3 lignes non nulles et 2 lignes nulles, donc

$$\boxed{\operatorname{rang}(T)=3}$$

Corrigé de l'exercice 19

matrice 4×5

Rappelons la matrice à échelonner :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -7 & -3 & -8 \\ -2 & -1 & -5 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 1. Pour annuler le -3 de L_2, on ajoute à la ligne L_2 trois fois la ligne L_1 (car $-3 + 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 & 3 \\ \textcircled{-3} & -2 & -7 & -3 & -8 \\ -2 & -1 & -5 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_2 + 3L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -5 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_2, coefficient par coefficient : $-3 + 3 \times 1 = 0$; $-2 + 3 \times 1 = 1$; $-7 + 3 \times 2 = -1$; $-3 + 3 \times 0 = -3$; $-8 + 3 \times 3 = 1$.

Transformation 2. Pour annuler le -2 de L_3, on ajoute à la ligne L_3 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ \textcircled{-2} & -1 & -5 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 + 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $-1 + 2 \times 1 = 1$; $-5 + 2 \times 2 = -1$; $-3 + 2 \times 0 = -3$; $-3 + 2 \times 3 = 3$.

Transformation 3. Pour annuler le -2 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 deux fois la ligne L_1 (car $-2 + 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ \textcircled{-2} & -1 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4 + 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $-2 + 2 \times 1 = 0$; $-1 + 2 \times 1 = 1$; $-5 + 2 \times 2 = -1$; $-3 + 2 \times 0 = -3$; $1 + 2 \times 3 = 7$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 4. Pour annuler le 1 de L_3, on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -3 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-1 - 1 \times (-1) = 0$; $-3 - 1 \times (-3) = 0$; $3 - 1 \times 1 = 2$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

Transformation 5. Pour annuler le 1 de L_4, on retranche à la ligne L_4 une fois la ligne L_2 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4 - L_2} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $1 - 1 \times 1 = 0$; $-1 - 1 \times (-1) = 0$; $-3 - 1 \times (-3) = 0$; $7 - 1 \times 1 = 6$.

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le coefficient de L_3 dans la colonne 3 vaut 0, et c'est aussi le cas de toutes les lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **La colonne 3 n'a donc pas de pivot** : on passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_3 pour le prochain pivot.

Colonne 4. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le coefficient de L_3 dans la colonne 4 vaut 0, et c'est aussi le cas de toutes les lignes situées en dessous : aucune permutation ne peut fournir de pivot. **La colonne 4 n'a donc pas de pivot** : on passe à la colonne suivante, en gardant la même ligne L_3 pour le prochain pivot.

Colonne 5. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 5 : il vaut 2 (non nul). On le ramène à 1 en multipliant L_3 par $\frac{1}{2}$.

Transformation 6. Multiplication de L_3 par $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_2]{\frac{1}{2}L_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Calcul, coefficient par coefficient : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. Les zéros des colonnes précédentes restent nuls.

Transformation 7. Pour annuler le 6 de L_4, on retranche à la ligne L_4 six fois la ligne L_3 (car $6 - 6 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{6} \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4 - 6L_3} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $6 - 6 \times 1 = 0$.

La colonne 5 est terminée ; la ligne L_3 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. La ligne L_4 est entièrement nulle : elle ne peut plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Conclusion de l'exercice 19

La forme échelonnée en lignes de U, notée U_e (pivots en rouge), est

$$U_e = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice U_e contient 3 lignes non nulles et 1 ligne nulle, donc

$$\operatorname{rang}(U) = 3$$

Corrigé de l'exercice 20

matrice 4×4

Rappelons la matrice à échelonner :

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Colonne 1. Le coefficient de L_1 dans cette colonne vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_2 (coefficient 1). On échange donc L_1 et L_2.

Transformation 1. Permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_1]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Le pivot est le coefficient de L_1 dans la colonne 1 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Le coefficient de L_2 dans la colonne 1 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

Transformation 2. Pour annuler le 1 de L_3, on retranche à la ligne L_3 une fois la ligne L_1 (car $1 - 1 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \textcircled{1} & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $1 - 1 \times 1 = 0$; $6 - 1 \times 3 = 3$; $5 - 1 \times (-1) = 6$; $3 - 1 \times 0 = 3$.

Transformation 3. Pour annuler le 2 de L_4, on retranche à la ligne L_4 deux fois la ligne L_1 (car $2 - 2 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ \textcircled{2} & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_4 - 2L_1} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $2 - 2 \times 1 = 0$; $5 - 2 \times 3 = -1$; $-3 - 2 \times (-1) = -1$; $1 - 2 \times 0 = 1$.

La colonne 1 est terminée ; la ligne L_1 ne sera plus utilisée.

Colonne 2. On ne travaille plus que sur les lignes L_2 à L_4. Le pivot est le coefficient de L_2 dans la colonne 2 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Transformation 4. Pour annuler le 3 de L_3, on retranche à la ligne L_3 trois fois la ligne L_2 (car $3 - 3 \times 1 = 0$).

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \textcircled{3} & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[O_3]{L_3 - 3L_2} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_3, coefficient par coefficient : $3 - 3 \times 1 = 0$; $6 - 3 \times 2 = 0$; $3 - 3 \times 1 = 0$. (Dans les colonnes déjà traitées, les deux lignes ont des zéros : $0 - \cdots \times 0 = 0$, ces zéros sont donc préservés.)

Transformation 5. Pour annuler le -1 de L_4, on ajoute à la ligne L_4 une fois la ligne L_2 (car $-1+1\times 1=0$).

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&\boxed{1}&2&1\\0&0&0&0\\0&\textcircled{-1}&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[O_3]{L_4+L_2}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

Calcul de la nouvelle ligne L_4, coefficient par coefficient : $-1+1\times 1=0$; $-1+1\times 2=1$; $1+1\times 1=2$.

La colonne 2 est terminée ; la ligne L_2 ne sera plus utilisée.

Colonne 3. On ne travaille plus que sur les lignes L_3 et L_4. Le coefficient de L_3 dans cette colonne vaut 0 : **un pivot ne peut jamais être nul**. On cherche plus bas une ligne dont le coefficient dans cette colonne est non nul : c'est L_4 (coefficient 1). On échange donc L_3 et L_4. Les deux lignes commencent par des zéros dans les colonnes déjà traitées : la permutation ne détruit aucun zéro.

Transformation 6. Permutation des lignes L_3 et L_4.

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[O_1]{L_3\leftrightarrow L_4}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Le pivot est le coefficient de L_3 dans la colonne 3 : il vaut 1, il est donc non nul et déjà égal à 1. Aucune multiplication n'est nécessaire.

Le coefficient de L_4 dans la colonne 3 est déjà nul : il n'y a rien à faire sur cette ligne.

La colonne 3 est terminée ; la ligne L_3 ne sera plus utilisée.

Fin de l'algorithme. La ligne L_4 est entièrement nulle : elle ne peut plus fournir de pivot, l'algorithme s'arrête.

Conclusion de l'exercice 20

La forme échelonnée en lignes de V, notée V_e (pivots en rouge), est

$$V_e=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&3&-1&0\\0&\mathbf{1}&2&1\\0&0&\mathbf{1}&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

La matrice V_e contient 3 lignes non nulles et 1 ligne nulle, donc

$$\operatorname{rang}(V)=3$$

Bilan de la série

Ce qu'il faut retenir

— O_3 est l'opération qui **crée les zéros** sous le pivot.

— O_2 sert à **ramener le pivot à** 1, ce qui simplifie les calculs suivants.

— O_1 est **indispensable lorsque le pivot est nul** : on échange sa ligne avec une ligne située en dessous ayant un coefficient non nul dans la même colonne.

— Si toute une colonne est nulle sous la ligne en cours, cette colonne n'a pas de pivot : on passe à la colonne suivante.

rang = nombre de lignes non nulles de la forme échelonnée

Récapitulatif des résultats

Exercice	Taille	Opérations utilisées	Rang
1	2×2	O_2, O_3	2
2	2×3	O_2, O_3	2
3	3×2	O_2, O_3	2
4	3×3	O_2, O_3	3
5	3×3	O_2, O_3	3
6	3×3	O_1, O_2, O_3	3
7	3×3	O_2, O_3	2
8	2×4	O_1, O_2	2
9	4×2	O_2, O_3	2
10	3×4	O_2, O_3	3
11	3×4	O_1, O_2, O_3	3
12	4×3	O_1, O_2, O_3	3
13	4×3	O_2, O_3	2
14	3×3	O_2, O_3	1
15	4×4	O_2, O_3	4
16	4×4	O_1, O_2, O_3	4
17	3×5	O_2, O_3	3
18	5×3	O_1, O_2, O_3	3
19	4×5	O_2, O_3	3
20	4×4	O_1, O_3	3

Partie 3 : Quand les calculs se compliquent, MATLAB

▶ Les limites du calcul à la main

Pour échelonner à la main une matrice de n lignes et n colonnes, il faut de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$ multiplications : environ 9 pour $n = 3$, 333 pour $n = 10$ et plus de 2 600 pour $n = 20$. Chacune peut être source d'erreur.

Pourquoi passer par un logiciel ?

— **Le calcul devient fastidieux** : le nombre d'opérations élémentaires augmente très vite avec la taille de la matrice.

— **Le risque d'erreur devient trop élevé** : une seule erreur de calcul se propage à toutes les transformations suivantes et fausse la forme échelonnée, donc le rang.

— **En gestion, les matrices sont grandes** : des dizaines de produits, de contraintes ou de centres d'analyse.

Dès que les choses commencent à se compliquer, il faut donc passer par un logiciel de calcul comme **MATLAB** (ou ses équivalents gratuits Octave et Python). Le rôle de l'étudiant reste essentiel : savoir **ce que l'on calcule** et **interpréter le résultat**.

▶ Calculer un rang avec MATLAB

La fonction `rank` donne directement le rang d'une matrice. La fonction `rref` (*reduced row echelon form*) va plus loin que l'algorithme de Gauss : elle fait aussi apparaître des zéros au-dessus des pivots (c'est l'algorithme de Gauss-Jordan, vu dans la série sur la résolution des systèmes). Le nombre de lignes non nulles est le même, donc le rang aussi.

Script MATLAB : rangs de la série

```
% Exercice 7
G = [-3 -3 -9; -1 -3 1; -2 -3 -4];
rang_G = rank(G)
R_G = rref(G)

% Exercice 14
P = [-1 3 2; 1 -3 -2; 2 -6 -4];
rang_P = rank(P)

% Exercice 20
V = [0 1 2 1; 1 3 -1 0; 1 6 5 3; 2 5 -3 1];
rang_V = rank(V)
R_V = rref(V)
```

Résultat affiché par MATLAB

```
rang_G = 2
R_G =
     1     0     5
     0     1    -2
```

```
     0     0     0

rang_P = 1
rang_V = 3
R_V =
     1     0     0    11
     0     1     0    -3
     0     0     1     2
     0     0     0     0
```

Comment lire ce résultat

— On retrouve les rangs des exercices 7, 14 et 20 : $\text{rang}(G) = 2$, $\text{rang}(P) = 1$ et $\text{rang}(V) = 3$.

— Dans `R_G` et `R_V`, on compte les lignes non nulles : c'est bien le rang.

— À la main, ces calculs demandent plusieurs transformations ; MATLAB les effectue en une fraction de seconde, quelle que soit la taille de la matrice.