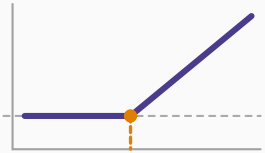
# Marchés et produits financiers

## Chapitre 16 : Les propriétés des taux d'intérêt



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 29 août 2026

# Plan du chapitre

Avant de commencer

Les taux de référence

Capitalisation et valorisation

Duration et convexité

Synthèse

# Avant de commencer

**Pourquoi ce chapitre ?**

Le taux d'intérêt est intervenu dans presque toutes les formules précédentes sans avoir jamais été défini précisément. Ce chapitre le fait : quels **taux de référence** existent, comment la **capitalisation** en modifie la lecture, comment se valorise une obligation, et comment mesurer sa sensibilité par la **duration** et la **convexité**.

# Les taux de référence

# Quel taux « sans risque » ?

## Les taux du Trésor

Les taux des emprunts d'État sont les plus proches du sans-risque en monnaie locale. Ils sont toutefois abaissés artificiellement par la demande réglementaire et par le traitement fiscal favorable dont ils bénéficient — ils sous-estiment donc le vrai taux sans risque du marché.

## Du LIBOR au SOFR

Le **LIBOR** était un taux déclaratif : les banques annonçaient le taux auquel elles pensaient pouvoir emprunter. Ce caractère déclaratif l'a rendu manipulable, ce qui a conduit à son abandon. Le **SOFR** le remplace : c'est un taux **effectivement constaté** sur les opérations de pension garanties par des titres du Trésor, donc adossé à des transactions réelles.

## Les taux de pension

Le **taux repo** rémunère un prêt garanti par des titres. Étant collatéralisé, il porte un risque de crédit minime et sert de référence pratique au taux sans risque à très court terme.

## Pourquoi ce changement compte

Le LIBOR incorporait un risque de crédit bancaire ; le SOFR, garanti, n'en comporte pratiquement pas. La transition a donc modifié la référence de valorisation de millions de contrats et créé un travail

# Capitalisation et valorisation

## L'effet de la fréquence

Un capital $A$ placé au taux annuel $R$ pendant $n$ années vaut $A(1+R/m)^{mn}$ avec $m$ capitalisations par an, et $Ae^{Rn}$ en capitalisation **continue**. Plus $m$ est grand, plus la valeur finale est élevée : le taux annoncé ne suffit pas, la fréquence doit être précisée.

## La conversion

Entre un taux $R_m$ capitalisé $m$ fois et un taux continu $R_c$ :

$$R_c = m \ln\left(1 + \frac{R_m}{m}\right), \qquad R_m = m\left(e^{R_c/m} - 1\right).$$

La capitalisation continue est la convention retenue en finance dérivée, parce qu'elle simplifie considérablement les formules.

# Évaluer une obligation

## Par actualisation des flux

Le prix est la somme des flux actualisés :

$$P = \sum_i c_i \, e^{-y t_i},$$

où $y$ est le **rendement à l'échéance** : le taux unique qui égalise la valeur actualisée des flux et le prix observé.

## Par les taux zéro-coupon

Le prix **théorique** actualise chaque flux à son propre **taux zéro-coupon** $r_i$ :

$$P = \sum_i c_i \, e^{-r_i t_i}.$$

C'est la valorisation correcte : le rendement à l'échéance n'est qu'une moyenne commode, dépendante de la structure des flux.

## La courbe zéro-coupon

Les taux zéro-coupon se déduisent des prix observés par **bootstrapping** : on part des maturités courtes

# Duration et convexité

# Mesurer la sensibilité

## La duration

La **duration de Macaulay** est la maturité moyenne des flux pondérée par leur valeur actuelle. La **duration modifiée** en dérive et donne directement la sensibilité :

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D\,\Delta y.$$

Une duration de 7 signifie qu'une hausse des taux de 1 % fait baisser le prix d'environ 7 %.

## La convexité

La duration est une approximation **linéaire**. La relation prix-taux étant courbée, on ajoute un terme du second ordre :

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D\,\Delta y + \tfrac{1}{2}\,C\,(\Delta y)^2.$$

La **convexité** $C$ est positive pour une obligation classique.

### Pourquoi la convexité est un avantage

Étant positive, elle atténue la baisse de prix quand les taux montent et amplifie la hausse quand ils baissent. À duration égale, une obligation plus convexe est donc **préférable** — et se paie plus cher. C'est exactement le raisonnement de développement limité au second ordre : la duration est le terme d'ordre un, la convexité celui d'ordre deux.

### L'usage en gestion des risques

Apparier les durations de l'actif et du passif — l'**immunisation** — protège contre de petits mouvements parallèles de taux. Mais cette protection est incomplète : elle ignore la convexité, et surtout elle suppose un déplacement **parallèle** de la courbe. Les déformations de pente ou de courbure, précisément les composantes que l'ACP identifie au chapitre 14 du cours quantitatif, échappent à cette couverture.

# Synthèse

# Ce qu'il faut retenir

**Synthèse du chapitre**

Le « taux sans risque » n'est pas unique : les taux du **Trésor** sont biaisés à la baisse, le **LIBOR** déclaratif a cédé la place au **SOFR** adossé à des transactions réelles, et le **taux repo** sert de référence collatéralisée à court terme. La **fréquence de capitalisation** modifie la valeur finale, la convention **continue** étant retenue en finance dérivée. Une obligation se valorise correctement en actualisant chaque flux à son propre **taux zéro-coupon**, la courbe s'obtenant par *bootstrapping* ; le **rendement à l'échéance** n'est qu'une moyenne commode. La **duration** donne la sensibilité au premier ordre, $\Delta P/P \approx -D\Delta y$, la **convexité** le terme correctif d'ordre deux, favorable au détenteur. L'**immunisation** par appariement des durations ne protège que contre des déplacements parallèles — les déformations de pente et de courbure lui échappent.