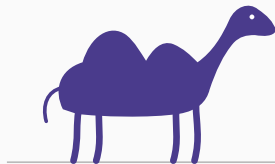


Introduction à l'analyse des données

Chapitre 9 : Axes, valeurs propres et inertie expliquée



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

La solution du problème

Le calcul sur le fil rouge

La propriété qui rend tout lisible

Ce que valent les valeurs propres

Ce qu'il faut retenir

La solution du problème

Le résultat

Le théorème central de l'ACP

Les **axes principaux** sont les **vecteurs propres** de la matrice des corrélations R .

L'**inertie portée** par chaque axe est la **valeur propre** associée.

C'est le chapitre 6 d'Algèbre linéaire

Un vecteur propre d'une matrice est une direction que la matrice ne fait pas tourner : elle se contente de l'étirer, d'un facteur qui est la valeur propre.

L'ACP n'est donc pas une méthode statistique nouvelle : **c'est une diagonalisation**. Le problème d'optimisation du chapitre 8 se ramène exactement à ce calcul.

Pourquoi cela tombe juste

La matrice des corrélations décrit la forme du nuage. Ses directions propres sont celles selon lesquelles il s'étire, et les valeurs propres mesurent de combien.

Chercher la direction d'allongement maximal, c'est donc chercher le vecteur propre de plus grande valeur propre. **Le problème du photographe a une solution exacte, et elle se calcule.**

Le calcul sur le fil rouge

La matrice des corrélations

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 \\ 0,9 & 1 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres

Pour une matrice de cette forme, les valeurs propres se lisent directement :

$$\lambda_1 = 1 + 0,9 = \mathbf{1,9} \qquad \lambda_2 = 1 - 0,9 = \mathbf{0,1}$$

Et leurs directions propres sont les deux **bissectrices** :

Axe	Direction	Sens
1	$(1; 1)/\sqrt{2}$	les deux critères ensemble
2	$(1; -1)/\sqrt{2}$	les deux critères en opposition

La propriété qui rend tout lisible

La somme des valeurs propres

Le résultat

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = I = p$$

La somme des valeurs propres est l'inertie totale, donc le nombre de variables.

Vérification

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,9 + 0,1 = 2 = p \quad \checkmark$$

Contrôle à faire systématiquement : si la somme ne tombe pas sur p , le calcul est faux.

L'inertie expliquée

$$\text{part de l'axe } k = \frac{\lambda_k}{p}$$

Sur le fil rouge

Ce que valent les valeurs propres

Trois configurations

Lire le spectre des valeurs propres

Configuration	Ce qu'elle signifie
λ_1 très grande, les autres faibles	une dimension dominante — les variables disent toutes la même chose
Valeurs propres décroissant régulièrement	plusieurs dimensions utiles
Toutes proches de 1	variables non corrélées — l'ACP n'apporte rien

Le dernier cas mérite d'être reconnu tout de suite

Si toutes les valeurs propres avoisinent 1, la matrice des corrélations est proche de l'identité : chaque variable porte une information propre.

Il n'y a alors **rien à résumer** — et le constater est un résultat, pas un échec.

Définition

Sur données réduites, une valeur propre supérieure à 1 signifie que l'axe porte **plus d'inertie qu'une variable seule**.

Un axe sous ce seuil résume donc moins bien qu'une variable isolée : c'est le fondement du critère de Kaiser.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Les axes principaux sont les **vecteurs propres** de la matrice des corrélations.
2. L'inertie portée par un axe est sa **valeur propre**.
3. Sur le fil rouge : $\lambda_1 = 1,9$ et $\lambda_2 = 0,1$, de directions $(1; 1)$ et $(1; -1)$.
4. La **somme des valeurs propres vaut p** — un contrôle systématique.
5. Le premier axe conserve $1,9/2 = \mathbf{95\%}$ de l'inertie du tableau.

La suite

Avec deux variables, le choix était simple. Avec douze, il faudra décider **combien d'axes retenir** — et c'est le chapitre 10.