

Chapitre 5

Le modèle à erreurs spatiales (SEM)

Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger
Polycopié de cours · Économétrie spatiale (Master)

Plan du chapitre

1. Quand la dépendance loge dans l'erreur
2. Pourquoi les MCO restent sans biais ici
3. Estimer le modèle correctement
4. Une confusion à éviter absolument

1 Quand la dépendance loge dans l'erreur

1.1 L'écriture du modèle

Modèle à erreurs spatiales

$$y = X\beta + u, \quad u = \lambda Wu + \varepsilon$$

La variable expliquée y ne contient ici absolument aucun terme spatial explicite : toute la dépendance observée est reportée sur le terme d'erreur composite u , lui-même autorégressif spatial de paramètre λ .

Ce que ce modèle raconte réellement sur le plan économique

Le modèle SEM convient précisément lorsque la dépendance observée n'est pas un mécanisme économique réel entre unités distinctes, mais bien l'empreinte d'une variable omise elle-même corrélée dans l'espace — qualité des sols pour des exploitations agricoles voisines, climat local pour des rendements agricoles, ou politique préfectorale partagée pour des indicateurs communaux. Rien ne se propage véritablement d'une unité à l'autre dans ce cas ; un même facteur non observé les affecte simplement de façon corrélée.

2 Pourquoi les MCO restent sans biais ici

2.1 Une différence essentielle avec le modèle SAR

Absence de toute simultanéité

Contrairement au modèle SAR étudié au chapitre 4, X demeure ici parfaitement exogène : aucun terme en Wy ne figure au membre de droite de l'équation. Les MCO appliqués directement à $y = X\beta + u$ restent donc sans biais et convergents.

Mais inefficaces, et surtout mal inférés

La matrice de variance-covariance de u n'est en réalité plus $\sigma^2 I$: les MCO ignorent cette structure particulière et perdent en efficacité, exactement comme en présence d'hétéroscédasticité déjà vue au chapitre 8, ou d'autocorrélation temporelle déjà vue au chapitre 12. Pire encore, les écarts-types usuels calculés par MCO se révèlent biaisés, le plus souvent vers le bas : on croit alors à tort un coefficient significatif, alors qu'il ne l'est en réalité pas.

3 Estimer le modèle correctement

3.1 Le maximum de vraisemblance

Estimation par maximum de vraisemblance

La transformation $u = (I - \lambda W)^{-1} \varepsilon$ donne, tout comme au chapitre 4, une vraisemblance comportant un terme jacobien $|I - \lambda W|$. La maximisation numérique de cette vraisemblance fournit alors des estimateurs $\hat{\lambda}$ et $\hat{\beta}$ convergents et efficaces sous l'hypothèse de normalité.

3.2 L'estimateur des moments généralisés

Estimateur GM et GS2SLS de Kelejian et Prucha

Une alternative solide au maximum de vraisemblance consiste à estimer d'abord β par MCO — convergent, rappelons-le, mais inefficace —, à récupérer ensuite les résidus obtenus, puis à estimer λ à partir de trois moments empiriques reliant ces résidus à leurs propres décalages spatiaux. On reconstruit alors une estimation par MCG faisable, dans l'esprit même de la correction de Cochrane-Orcutt déjà vue au chapitre 12 — mais appliquée ici à une corrélation spatiale plutôt que temporelle.

Un parallèle exact avec les MCG faisables en temporel

La logique retenue est rigoureusement la même qu'au chapitre 12 : on ne connaît jamais a priori le paramètre d'autocorrélation en jeu — ϕ alors, λ à présent —, on l'estime à partir des résidus MCO obtenus, puis on transforme les données disponibles pour retrouver des erreurs proches de l'homoscédasticité et de la non-corrélation recherchées. Seule change, au fond, la nature même du décalage considéré — temporel là-bas, spatial ici.

4 Une confusion à éviter absolument

4.1 SAR et SEM ne répondent jamais à la même question

Deux diagnostics distincts, deux lectures économiques

	SAR	SEM
Où loge ρ ou λ	dans y	dans l'erreur
MCO sur le modèle naïf	biaisés	non biaisés, inefficaces
Lecture économique	spillover réel entre unités	facteur omis corrélé dans l'espace
Multiplicateur spatial	oui, sur X et sur les chocs	non, aucun effet marginal modifié

Pourquoi la question des effets marginaux compte à ce point

Dans un modèle SEM correctement estimé, une hausse d'une unité de x_k dans la région i n'affecte jamais que y_i elle-même : le coefficient β_k s'interprète alors tout à fait normalement, exactement comme en MCO ordinaire. Dans un modèle SAR en revanche, cette même hausse se propage à l'ensemble des autres régions via le multiplicateur spatial déjà vu au chapitre précédent — β_k seul ne suffit alors plus jamais à décrire l'effet total obtenu, question que le chapitre 7 traite en détail complet.

5 Ce qu'il faut retenir

Cinq points

Le modèle SEM loge la dépendance spatiale dans le terme d'erreur plutôt que directement dans y . Les MCO restent alors sans biais mais deviennent inefficaces, avec des écarts-types systématiquement faussés. Le maximum de vraisemblance ou l'estimateur des moments généralisés de Kelejian et Prucha restaurent tous deux l'efficacité perdue, sur un principe proche des MCG faisables déjà vus en séries temporelles. Contrairement au modèle SAR, le SEM ne modifie jamais l'interprétation des coefficients associés à X : il ne corrige en réalité que l'inférence statistique elle-même. Le chapitre 6 réunit à présent SAR et SEM, et affronte directement la question qu'on ne pouvait plus reporter : comment choisir rigoureusement entre les deux à partir des seules données disponibles ?

Pour aller plus loin

- [1] Luc Anselin, *Spatial Econometrics : Methods and Models*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [2] Harry Kelejian et Ingmar Prucha, « A Generalized Moments Estimator for the Autoregressive Parameter in a Spatial Model », *International Economic Review*, 1999.
- [3] Harry Kelejian et Ingmar Prucha, « Estimation of Simultaneous Systems of Spatially Interrelated Cross Sectional Equations », *Journal of Econometrics*, 2004.
- [4] James LeSage et Robert Kelley Pace, *Introduction to Spatial Econometrics*, CRC Press, 2009.
- [5] J. Paul Elhorst, *Spatial Econometrics : From Cross-Sectional Data to Spatial Panels*, Springer, 2014.