

Chapitre 4

Le modèle à erreurs spatiales (SEM)

Corrigé

Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger
Exercices et corrigés · Économétrie spatiale (Master)

1 Exercices du chapitre

Correction — Exercice 1

- (a) **SEM** : aucun mécanisme direct entre parcelles, seulement une variable omise (qualité du sol) elle-même corrélée dans l'espace.
- (b) **SAR** : effet de déplacement direct de la délinquance d'un quartier à l'autre, une véritable rétroaction.
- (c) **SEM** : la politique préfectorale est un facteur commun non observé, corrélé dans l'espace, mais aucune commune n'influence directement le taux de réussite d'une autre.
- (d) Pour le scénario (a), les MCO sur $y = X\beta + u$ restent **non biaisés et convergents**, mais deviennent **inefficaces** : la matrice de variance-covariance de u n'est plus $\sigma^2 I$, et les écarts-types usuels sont faussés.

Correction — Exercice 2

- (a) (1) Estimer β par MCO sur $y = X\beta + u$ (convergent mais inefficace) ; (2) à partir des résidus MCO, estimer λ par la méthode des moments généralisés (trois moments empiriques liant les résidus à leurs décalages spatiaux) ; (3) utiliser $\hat{\lambda}$ pour transformer les données et ré-estimer β par MCG faisable (GS2SLS).
- (b) Parce que dans le modèle SEM, X demeure exogène : aucun terme en Wy ne figure au membre de droite de $y = X\beta + u$, contrairement au SAR où Wy est corrélé avec ε . L'absence de simultanéité garantit la validité (mais pas l'efficacité) des MCO à la première étape.
- (c) Le paramètre λ de dépendance spatiale dans le terme d'erreur $u = \lambda Wu + \varepsilon$ joue exactement le rôle que joue ϕ dans $u_t = \phi u_{t-1} + \varepsilon_t$ en séries temporelles — tous deux capturent la structure de corrélation résiduelle qu'il faut estimer avant de pouvoir transformer les données.
- (d) Parce que le paramètre de corrélation (ϕ ou λ) n'est **pas connu a priori** : il doit d'abord être **estimé** à partir des résidus MCO avant de servir à la transformation des données, contrairement à une MCG exacte qui suppose la structure de covariance intégralement connue dès le départ.

Correction — Exercice 3

- (a) L'effet n'est pas nul car, dans le modèle SAR, le choc sur X_C affecte y_C , qui à son tour affecte y_A via le terme ρWy (la rétroaction bouclée) — une propagation **réelle** à travers la variable expliquée elle-même, capturée par le multiplicateur spatial.
- (b) **L'effet est nul** : dans un modèle SEM, $y_A = X_A\beta + u_A$ ne dépend de X_C à aucun moment — λ ne gouverne que la corrélation entre les termes d'erreur u_A et u_C , jamais la relation entre X_C et y_A .
- (c) Parce que ρ et λ n'interviennent pas au même endroit de l'équation : ρ figure dans l'équation qui détermine y lui-même (via Wy), et se propage donc mécaniquement à travers le système économique ; λ figure uniquement dans la structure du terme d'erreur u , qui n'a par construction aucun effet sur la façon dont X détermine y . Une valeur numérique identique des deux paramètres ne dit donc rien sur leurs conséquences, radicalement différentes par nature.
- (d) **Non, cette affirmation est incorrecte.** Comme le montre la question (b), λ ne gouverne que la corrélation entre erreurs, jamais un effet de propagation de X vers les régions voisines : dans un SEM correctement spécifié, β_k s'interprète exactement comme en MCO ordinaire, sans aucun effet indirect à ajouter — c'est précisément la mise en garde centrale de ce chapitre.

2 Exercice cumulatif (chapitre 4, chapitre 3, chapitre 2, chapitre 1 et introduction)

Correction — Exercice 4

- (a) **Non.** Comme pour l'exercice cumulatif du chapitre 3, l'indice de Moran détecte une dépendance sans indiquer où elle loge — $I = 0,29$ significatif est compatible avec un SAR comme avec un SEM.
- (b) Ce raisonnement décrit une **corrélation nuisible** au sens de l'introduction (une variable omise, corrélée dans l'espace, sans mécanisme direct entre parcelles) : il justifie donc le modèle **SEM**.
- (c) Une diffusion réelle des pratiques agricoles entre parcelles voisines relèverait d'une **dépendance substantielle**, justifiant plutôt le modèle **SAR**. Le choix ne peut jamais reposer sur le seul indice de Moran car celui-ci, purement statistique, ne distingue à aucun moment les deux mécanismes : seul un raisonnement économique sur la nature du lien entre parcelles permet de trancher.
- (d) L'effet de l'irrigation, dans un modèle SEM, se **limite à la parcelle concernée** : contrairement à l'exercice 3 du chapitre 3 où un modèle SAR de $\rho = 0,3$ propage l'effet aux voisines à hauteur de 0,1299, un modèle SEM avec $\hat{\lambda} = 0,3$ ne modifie **en rien** l'interprétation du coefficient de l'irrigation : λ ne gouverne que la structure des erreurs, jamais la propagation des effets de X .

3 Applications en sciences économiques

Correction — Exercice 5

- (a) Si la qualité du sol varie graduellement dans l'espace mais n'affecte directement aucune parcelle voisine (aucun mécanisme de propagation réelle entre parcelles), elle produit exactement la signature d'une corrélation nuisible logée dans le terme d'erreur — la définition même du cas SEM.
- (b) Contrairement à la simple hétéroscédasticité, où les écarts-types robustes suffisent car les coefficients MCO restent efficaces relativement à leur variance réelle une fois corrigée, la dépendance spatiale dans un SEM implique une structure de covariance **non diagonale** entre observations : ignorer $\hat{\lambda}$ prive l'estimateur de toute l'information exploitable pour retrouver l'**efficacité** perdue, ce que de simples écarts-types robustes ne peuvent pas restaurer (ils corrigent l'inférence sur un estimateur resté inefficace, sans améliorer l'estimateur lui-même).
- (c) **Non, en principe non biaisé** : dans un modèle SEM correctement spécifié, X (dont l'irrigation) demeure exogène par hypothèse — la qualité du sol omise entre dans le terme d'erreur u , mais tant qu'elle n'est pas corrélée avec l'irrigation elle-même, le coefficient MCO de l'irrigation reste non biaisé, seulement inefficace et mal inféré.

Correction — Exercice 6

- (a) **Corrélation nuisible** : la politique préfectorale est un facteur commun non observé, sans mécanisme direct de propagation entre communes voisines.
- (b) Le chercheur devrait privilégier a priori le modèle **SEM**, tout en estimant également un modèle **SAR** en parallèle pour vérifier la robustesse de sa conclusion — exactement la pratique recommandée pour le ML et l'IV/GMM au chapitre 3, transposée ici au choix de spécification.
- (c) S'il estimait à tort un SAR, il attribuerait faussement à un mécanisme de **propagation réelle** entre communes (via le multiplicateur spatial) ce qui provient en réalité d'un facteur régional commun : il surestimerait l'effet total des moyens éducatifs propres à une commune, en lui imputant à tort des effets indirects sur les communes voisines qui n'existent pas réellement — une confusion entre effet propre et effet de contagion inexistante.