

Chapitre 4

Le modèle autorégressif spatial (SAR)

Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger
Polycopié de cours · Économétrie spatiale (Master)

Plan du chapitre

1. Quand la dépendance loge dans y
2. Pourquoi les MCO échouent ici
3. Deux méthodes d'estimation
4. Le multiplicateur spatial

1 Quand la dépendance loge dans y

1.1 L'écriture du modèle

Modèle autorégressif spatial

$$y = \rho W y + X\beta + \varepsilon$$

$W y$ désigne le décalage spatial de y déjà construit au chapitre 2 ; ρ mesure précisément l'intensité de la dépendance spatiale logée dans la variable expliquée elle-même. La valeur $\rho = 0$ redonne exactement le modèle de régression multiple ordinaire déjà connu.

Une véritable rétroaction, non un simple effet

$\rho \neq 0$ signifie qu'une variation de y survenue dans une région donnée se répercute sur ses régions voisines via $W y$ — et que cette répercussion revient ensuite, en partie, affecter en retour la région de départ elle-même. C'est là un mécanisme de rétroaction véritablement bouclée, fondamentalement différent d'un simple régresseur exogène ordinaire.

2 Pourquoi les MCO échouent ici

2.1 L'endogénéité structurelle de $W y$

Le problème de simultanéité

$W y$ figure certes au membre de droite de l'équation, mais y — donc $W y$ lui-même — dépend en retour de ε via cette même équation. $W y$ se trouve donc corrélé avec ε : très exactement le problème d'endogénéité déjà rencontré au chapitre 16 d'*Économétrie avancée* pour les équations simultanées, ici simplement transposé à la dimension spatiale plutôt que temporelle.

Ce que cela coûte concrètement en pratique

Estimer ρ par de simples MCO ordinaires produit alors un coefficient biaisé et non convergent, et ce quelle que soit la taille de l'échantillon disponible. Le remède approprié ne peut donc jamais consister en une simple correction des écarts-types calculés : il faut nécessairement changer de méthode d'estimation elle-même.

3 Deux méthodes d'estimation

3.1 Le maximum de vraisemblance

Estimation par maximum de vraisemblance

La forme réduite du modèle s'écrit $y = (I - \rho W)^{-1}(X\beta + \varepsilon)$. La vraisemblance du modèle SAR intègre alors un terme jacobien $|I - \rho W|$ issu directement de ce changement de variable, terme entièrement absent d'une régression ordinaire classique. La maximisation numérique de cette vraisemblance fournit des estimateurs convergents de ρ et de β obtenus simultanément.

3.2 Les variables instrumentales

Estimation par variables instrumentales et GMM

Une alternative solide au maximum de vraisemblance consiste à instrumenter Wy par WX , et éventuellement par W^2X , tous deux corrélés avec Wy mais non corrélés avec ε sous les hypothèses usuelles retenues. On retombe alors très exactement sur les doubles moindres carrés déjà vus au chapitre 15, appliqués cette fois à un régresseur spatial plutôt qu'à un régresseur classiquement endogène.

Quand préférer concrètement l'une ou l'autre méthode

Le maximum de vraisemblance se révèle plus efficace si les hypothèses distributionnelles retenues tiennent effectivement, mais reste coûteux en calcul pour de très grands échantillons, et sensible à une mauvaise spécification de W . L'approche par variables instrumentales ou GMM est plus robuste et nettement moins coûteuse à grande échelle, au prix d'une perte d'efficacité statistique. En pratique courante, les deux méthodes sont couramment estimées côte à côte, précisément pour vérifier la robustesse des conclusions obtenues.

4 Le multiplicateur spatial

4.1 Un choc qui se propage en cercles concentriques

Développement en série de Neumann

$$(I - \rho W)^{-1} = I + \rho W + \rho^2 W^2 + \rho^3 W^3 + \dots$$

Un choc initial survenu sur X dans une région donnée se propage d'abord à ses voisines immédiates, via le terme ρW , puis aux voisines de ses voisines, via le terme $\rho^2 W^2$, avec un poids qui décroît géométriquement à mesure que l'on s'éloigne dans le graphe de voisinage considéré.

Application numérique sur les quatre régions du chapitre 2

Avec $\rho = 0,3$ et la matrice W standardisée en ligne déjà construite précédemment, un choc de +1 sur X_C affecte d'abord directement y_C , puis à hauteur de 0,3 ses voisines A, B, D via le terme ρW , puis à hauteur de $0,3^2 = 0,09$ leurs propres voisines via le terme $\rho^2 W^2$ — un effet qui s'éteint rapidement dans l'espace, mais qui ne s'annule en réalité jamais tout à fait.

La condition de stabilité requise

Cette série ne converge en réalité que si $|\rho| < 1/\lambda_{\max}(W)$, où $\lambda_{\max}(W)$ désigne la plus grande valeur propre de W . Avec une matrice standardisée en ligne, cette plus grande valeur propre vaut très exactement un : la condition se réduit alors simplement à $|\rho| < 1$, exactement comme la condition de stationnarité $|\phi| < 1$ d'un processus AR(1) déjà rencontrée au chapitre 11.

5 Ce qu'il faut retenir

Cinq points

Le modèle SAR place la dépendance spatiale directement dans y lui-même, sous la forme d'une rétroaction bouclée transitant par Wy . Cette rétroaction rend Wy structurellement endogène et interdit tout recours aux MCO ordinaires. Le maximum de vraisemblance ou l'approche par variables instrumentales et GMM restaurent tous deux la convergence de l'estimateur. Le multiplicateur spatial $(I - \rho W)^{-1}$ révèle qu'un choc purement local se propage en réalité à tout le système économique, avec un poids décroissant dans l'espace. Cette propagation exige une condition de stabilité analogue à celle, déjà connue, d'un processus AR(1). Le chapitre 5 traite l'autre cas de figure possible : une dépendance qui ne loge plus dans y , mais directement dans le terme d'erreur.

Pour aller plus loin

- [1] Luc Anselin, *Spatial Econometrics : Methods and Models*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [2] James LeSage et Robert Kelley Pace, *Introduction to Spatial Econometrics*, CRC Press, 2009.
- [3] Harry Kelejian et Ingmar Prucha, « A Generalized Spatial Two-Stage Least Squares Procedure », *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 1998.
- [4] Lung-fei Lee, « Asymptotic Distributions of Quasi-Maximum Likelihood Estimators for Spatial Autoregressive Models », *Econometrica*, 2004.
- [5] J. Paul Elhorst, *Spatial Econometrics : From Cross-Sectional Data to Spatial Panels*, Springer, 2014.