

Chapitre 1

La matrice de pondération spatiale

Corrigé

Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger
Exercices et corrigés · Économétrie spatiale (Master)

1 Exercices du chapitre

Correction — Exercice 1

(a) Contiguïté tour ($A \sim B, A \sim C, B \sim D, C \sim D$, pas de lien diagonal) :

$$W_{\text{tour}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ordre } (A, B, C, D).$$

(b) Contiguïté reine (tous les liens, y compris les diagonales $A-D$ et $B-C$) :

$$W_{\text{reine}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Sous la contiguïté tour, chaque région a **2 voisins**, donc $w_{ij}^* = 1/2$ pour chaque lien existant. Sous la contiguïté reine, chaque région a **3 voisins**, donc $w_{ij}^* = 1/3$ pour chaque lien existant (résultat identique à l'exemple du cours).

Correction — Exercice 2

(a) Sous contiguïté tour, $A \sim \{B, C\}, B \sim \{A, D\}, C \sim \{A, D\}, D \sim \{B, C\}$, chaque région ayant 2 voisins :

$$W^* = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) $(W^*y)_A = \frac{1}{2}(15 + 9) = 12$; $(W^*y)_B = \frac{1}{2}(12 + 11) = 11,5$; $(W^*y)_C = \frac{1}{2}(12 + 11) = 11,5$; $(W^*y)_D = \frac{1}{2}(15 + 9) = 12$.

(c) $(W^*y)_C = 11,5$ signifie que le revenu moyen chez les voisines de C (à savoir A et D) est de 11 500 dirhams, alors même que le revenu propre de C n'est que de 9 000 dirhams.

(d) **Oui** : 11,5 est bien la plus faible des quatre valeurs $\{12; 11,5; 11,5; 12\}$, à égalité avec B . Mais ce résultat ne provient **pas** du faible revenu propre de C : par convention $w_{CC} = 0$ (une région n'est jamais sa propre voisine), donc $y_C = 9$ n'entre **à aucun moment** dans le calcul de $(W^*y)_C$. La coïncidence tient uniquement au fait que C et B partagent exactement les mêmes voisines (A et D) sous ce critère de contiguïté — une propriété de la configuration géographique, pas du niveau de revenu de C .

Correction — Exercice 3

(a) $d_{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-1)^2} = 1$; $d_{AC} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$; $d_{AD} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1,4142$.

(b) Poids bruts : $w_{AB} = 1/1 = 1$; $w_{AC} = 1/1 = 1$; $w_{AD} = 1/\sqrt{2} \approx 0,7071$. Somme = 2,7071. Poids standardisés : $w_{AB}^* = w_{AC}^* = 1/2,7071 \approx 0,3694$; $w_{AD}^* = 0,7071/2,7071 \approx 0,2612$.

(c) $(W^*y)_A = 0,3694 \times 8 + 0,3694 \times 10 + 0,2612 \times 6 \approx 8,2164$. Avec la contiguïté reine, on obtenait exactement 8. Les deux résultats diffèrent car la pondération par la distance donne un poids **strictement plus faible** à D (le plus éloigné de A) qu'aux deux autres voisines, alors que la contiguïté reine attribuait un poids **identique** ($1/3$) aux trois voisines sans tenir compte de leur éloignement relatif; D ayant le taux de chômage le plus bas (6 %), le réduire son poids tire légèrement $(Wy)_A$ vers le haut.

(d) Avec $\alpha = 2$, le poids de D deviendrait $w_{AD} = 1/(\sqrt{2})^2 = 1/2$, contre $w_{AB} = w_{AC} = 1$ toujours : le poids relatif de D **diminuerait encore davantage** par rapport à $\alpha = 1$ (son poids standardisé passerait de 0,2612 à $1/(1+1+0,5) = 0,2$) — une décroissance plus rapide de l'influence avec la distance éteint

plus vite le poids des voisines éloignées.

2 Exercice cumulatif (chapitre 1 et introduction)

Correction — Exercice 4

(a) **Non, ce n'est pas exact.** W formalise uniquement la structure géométrique du voisinage (qui est proche de qui, et avec quelle intensité) ; elle ne dit rien sur le *mécanisme économique* qui produirait la ressemblance observée entre unités voisines. La distinction entre dépendance substantielle et corrélation nuisible relève d'un raisonnement économique sur les données, pas d'une propriété calculable à partir de W seule — W est un outil nécessaire pour *tester* et *modéliser* la dépendance, non pour en identifier la nature.

(b) Construire W à partir des flux commerciaux observés revient à fonder la structure de voisinage sur une variable économique elle-même potentiellement corrélée avec le PIB régional (des régions au PIB élevé commercent probablement davantage entre elles) : W ne serait alors plus une information exogène fixée en amont, mais un objet contaminé par la variable que l'on cherche justement à expliquer, ce qui confond artificiellement dépendance spatiale et simple corrélation entre régresseurs — exactement la mise en garde d'Anselin.

(c) Intuitivement, le modèle SAR va chercher à expliquer y (le taux de chômage régional) **par son propre décalage spatial** Wy (le taux de chômage moyen chez les voisines), en plus des régresseurs usuels — c'est la formalisation directe de l'effet de rétroaction (dépendance logée dans y) évoqué dans l'introduction.

3 Applications en sciences économiques

Correction — Exercice 5

(a) Un critère de contiguïté simple traite une frontière partagée de la même façon, que les deux provinces concernées soient immenses ou minuscules : deux provinces sahariennes de plusieurs centaines de milliers de km^2 partageant une frontière compteraient comme aussi « voisines » que deux petites provinces du Rif de quelques centaines de km^2 — alors que, économiquement, la distance entre les centres d'activité de deux immenses provinces est souvent bien plus grande.

(b) Un critère de distance entre centroïdes atténue le problème mais ne l'élimine pas totalement : le centroïde géométrique d'une très grande province peut être très éloigné de ses zones réellement peuplées ou actives économiquement, ce qui fausse encore la distance « économiquement pertinente » entre deux unités.

(c) Le critère des k plus proches voisins garantit à **chaque** province un nombre fixe de voisins, quelle que soit sa taille ou son isolement relatif, ce qui évite le problème des « îles » — une province isolée (par exemple une province saharienne très étendue et peu peuplée) qui n'aurait aucune voisine sous un critère de contiguïté ou de distance à seuil strict se voit malgré tout attribuer des voisines sous ce critère, rendant le calcul de Wy toujours possible.

Correction — Exercice 6

(a) D'après l'exercice 3, $d_{AB} = 1$, $d_{AC} = 1$, $d_{AD} = \sqrt{2} \approx 1,4142$. Les $k = 2$ plus proches voisins de A sont donc **B** et **C** (à égalité, distance 1), D étant strictement plus éloigné.

(b) Puisque B et C sont à égalité, chacun reçoit un poids brut égal ($w_{AB} = w_{AC} = 1$, $w_{AD} = 0$), d'où après standardisation $w_{AB}^* = w_{AC}^* = 0,5$, $w_{AD}^* = 0$. Alors $(W_{2NN}^*y)_A = 0,5 \times 3,2 + 0,5 \times 1,5 = 2,35\%$.

(c) Exemple : un point i isolé au centre d'un semis dense de points, entouré de nombreux points très proches les uns des autres mais un peu plus éloignés de i . Un point j parmi ce groupe dense peut avoir i comme un de ses k plus proches voisins (si i est plus proche que certains de ses voisins du groupe), sans que i ait j parmi ses propres k plus proches voisins si i est, lui, entouré d'autres points encore plus

proches que j .