

Chapitre 2

Détecter la dépendance spatiale (Moran, Geary, LISA)

Feuille d'exercices

Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger
Exercices et corrigés · Économétrie spatiale (Master)

1 Exercices du chapitre

Exercice 1 — Un cas particulier instructif : le graphe complet

On reprend l'exemple du cours : quatre régions A, B, C, D , contiguïté **reine**, chaque région étant voisine des trois autres (poids $1/3$ après standardisation). On admettra sans démonstration que, dans ce cas précis, $S_0 = \sum_i \sum_j w_{ij} = n = 4$.

- (a) Calculer l'indice de Moran I pour $y_A = 7, y_B = 8, y_C = 10, y_D = 6$ (les valeurs du cours).
- (b) Recalculer I pour une toute autre série, $y_A = 100, y_B = 1, y_C = 1, y_D = 1$.
- (c) Que remarque-t-on ? Expliquer pourquoi, avec seulement $n = 4$ régions **toutes mutuellement voisines** (un graphe complet), l'indice de Moran ne peut, par construction algébrique, jamais s'écarter de $E[I] = -1/(n-1)$, quelles que soient les valeurs de y .
- (d) Quelle conséquence pratique en tirer sur le nombre minimal d'unités et la structure de W nécessaires pour qu'un test de Moran soit réellement informatif ?

Exercice 2 — Moran et Geary sous contiguïté tour

On reprend la contiguïté **tour** des quatre régions ($A \sim \{B, C\}, B \sim \{A, D\}, C \sim \{A, D\}, D \sim \{B, C\}$, poids $1/2$) et les revenus $y_A = 12, y_B = 15, y_C = 9, y_D = 11$ du chapitre 1 (avec $S_0 = n = 4$ également, chaque région ayant un nombre égal de voisins).

- (a) Calculer $\bar{y}$ et les écarts centrés ($y_i - \bar{y}$) pour les quatre régions.
- (b) Calculer l'indice de Moran I .
- (c) Calculer l'indice de Geary C .
- (d) I est-il proche de $E[I] = -1/3$? C est-il proche de 1 ? Ces deux constats sont-ils cohérents entre eux quant à la présence ou l'absence de dépendance spatiale dans ces données ?

Exercice 3 — Diagramme de Moran et décomposition LISA

On reprend l'exemple du cours (contiguïté reine, $y_A = 7, y_B = 8, y_C = 10, y_D = 6, \bar{y} = 7,75$, écart-type $\approx 1,479$).

- (a) Calculer les scores centrés-réduits z_A, z_B, z_C, z_D .
- (b) Pour chaque région, indiquer dans quel quadrant du diagramme de Moran elle se situe (Haut-Haut, Bas-Bas, Haut-Bas ou Bas-Haut), sachant que le décalage spatial $(Wz)_i$ moyenne les z des trois autres régions.
- (c) Calculer les indices locaux $I_i = z_i \sum_j w_{ij} z_j$ pour les quatre régions.
- (d) Vérifier numériquement que $\sum_i I_i = n \times I$, où $I = -1/3$ (résultat de l'exercice 1).

2 Exercice cumulatif (chapitre 2, chapitre 1 et introduction)

Exercice 4 — Détecter ne suffit pas à diagnostiquer

L'introduction distingue dépendance substantielle et corrélation nuisible ; le chapitre 1 a montré comment construire W ; ce chapitre fournit enfin un test statistique de dépendance spatiale.

- (a) Un chercheur calcule un indice de Moran $I = 0,55$, très significativement supérieur à $E[I]$, sur le taux de pauvreté de 40 communes. Peut-il en conclure, à partir de ce seul résultat, qu'il est face à une dépendance **substantielle** plutôt qu'à une corrélation **nuisible** ? Justifier à partir de ce que l'indice de Moran mesure réellement.
- (b) Reformuler ce que le chercheur peut, en revanche, légitimement conclure à partir de son résultat.
- (c) Pourquoi la matrice W utilisée pour ce test doit-elle avoir été construite, comme le rappelle le chapitre 1, sur une base exogène et non sur la variable de pauvreté elle-même ou une variable

corrélée avec elle ?

- (d) Le chercheur veut maintenant déterminer si la dépendance détectée loge dans y ou dans l'erreur, pour choisir entre les modèles des chapitres 3 et 4. L'indice de Moran, à lui seul, permet-il de trancher ?

3 Applications en sciences économiques

Exercice 5 — Criminalité urbaine

Une chercheuse calcule l'indice de Moran du taux de criminalité sur $n = 30$ quartiers d'une agglomération : $I = 0,42$. Elle obtient, par simulation, $\text{Var}(I) = 0,0087$.

- (a) Calculer $E[I]$ pour $n = 30$.
- (b) Calculer la statistique $z = (I - E[I]) / \sqrt{\text{Var}(I)}$.
- (c) Au seuil usuel de 5 % (valeur critique $\pm 1,96$), l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation spatiale est-elle rejetée ?
- (d) La chercheuse dispose de peu d'observations par rapport à la taille usuellement recommandée pour l'approximation asymptotique normale. Quelle alternative le cours recommande-t-il dans ce cas, et pourquoi est-elle plus prudente ici ?

Exercice 6 — Cartographier une épidémie avec les indicateurs LISA

Un épidémiologiste dispose du taux d'incidence d'une maladie infectieuse dans 120 communes et calcule une carte LISA : 15 communes ressortent en Haut-Haut (significatif), 3 en Bas-Haut, aucune en Haut-Bas ni Bas-Bas significatif.

- (a) Que signifie, concrètement, qu'une commune ressorte en Haut-Haut sur cette carte ?
- (b) Que signifierait, à l'inverse, qu'une commune ressorte en Bas-Haut ?
- (c) En quoi cette carte LISA apporte-t-elle une information que l'indice de Moran global, seul, n'aurait pas pu fournir ?
- (d) Proposer une utilisation pratique de cette carte pour cibler une campagne de vaccination avec des ressources limitées.