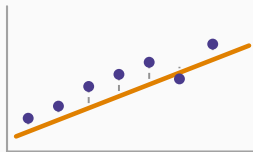


Introduction à l'économétrie

Chapitre 12 : Les hypothèses de Gauss-Markov



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

À quelles conditions

Les cinq de Gauss-Markov

La sixième

Ce qu'il faut retenir

À quelles conditions

Huit chapitres de résultats, et une dette

Nous avons estimé, testé, encadré, prévu — en admettant chaque fois que les formules étaient valides.

Elles ne le sont que sous conditions. Ce chapitre les énonce, le suivant montre ce qui tombe quand elles ne tiennent pas.

Le théorème de Gauss-Markov

Sous cinq hypothèses, les estimateurs des moindres carrés sont **BLUE** : *Best Linear Unbiased Estimator*.

Le meilleur — au sens de la variance minimale — parmi les estimateurs **linéaires** et **sans biais**.

Les six hypothèses

Cinq hypothèses de Gauss-Markov, et une sixième qui ne sert qu'aux petits échantillons.

	L'hypothèse	Ce qu'elle garantit
H1	Le modèle est linéaire en ses paramètres	la forme estimée est la bonne
H2	$E(\varepsilon_i X) = 0$ — exogénéité	les estimateurs sont sans biais
H3	$V(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2$ — homoscédasticité	les écarts-types sont justes
H4	$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ — indépendance	les écarts-types sont justes
H5	Pas de colinéarité parfaite	le calcul est possible, et unique
H6	Les ε_i sont normales	les tests sont exacts à petit n

Ce que le théorème conclut

Sous H1 à H5, les moindres carrés sont **BLUE** : le meilleur estimateur linéaire sans biais. Sans biais, et de variance minimale dans sa classe.

H2 est d'une autre nature que les autres

Elle seule concerne le *biais*. H3 et H4 ne touchent que la *précision* et les écarts-types — graves, mais réparables.

H1 est moins restrictive qu'elle n'en a l'air

« Linéaire en les paramètres » : $\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x + \varepsilon$ l'est. La courbure passe par la transformation des variables, non par l'abandon des MCO.

H6 est en gris parce qu'au-delà de trente observations, le théorème central limite la rend inutile.

Les cinq de Gauss-Markov

Linéaire en les paramètres

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

Les β apparaissent au premier degré, sans produit ni fonction entre eux.

Beaucoup moins restrictif qu'il n'y paraît

$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x + \varepsilon$ est **linéaire en les paramètres**, bien que la relation entre y et x soit une puissance.

La courbure passe par la **transformation des variables**, non par l'abandon des moindres carrés. Le chapitre 19 en fait un usage systématique.

La plus importante de toutes

$$E(\varepsilon_i \mid X) = 0$$

L'erreur ne contient rien de systématiquement lié aux variables explicatives.

Elle seule concerne le biais

Sous H2, $E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$: l'estimation vise juste.

Sans elle, tout le reste devient sans objet. Un estimateur biaisé peut être très précis autour de la mauvaise valeur — c'est la deuxième cible du chapitre 6 de l'inférence, la plus traître des quatre.

Homoscédasticité et indépendance

$$V(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{pour tout } i \qquad \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

La même dispersion partout; aucune liaison entre les erreurs.

Les deux sont violées, et sur les mêmes données

H3 tombe dès que la dispersion dépend du niveau : les salaires élevés sont plus dispersés que les bas.

H4 tombe dès que les observations sont **groupées** : deux ménages du même quartier partagent ce que le modèle ignore.

Aucune des deux ne biaise les coefficients. Toutes deux faussent les **écarts-types**.

La condition d'existence

Aucune variable explicative ne doit être une combinaison linéaire exacte des autres.

Ce n'est pas une hypothèse statistique

C'est une condition **algébrique** : sans elle, $X'X$ n'est pas inversible et le calcul est impossible.

Le logiciel refuse alors d'estimer, ou supprime une variable de lui-même. Le cas dangereux n'est pas la colinéarité parfaite — visible immédiatement — mais la colinéarité **presque** parfaite, qui laisse le calcul aboutir. C'est le chapitre 14.

La sixième

Elle ne fait pas partie de Gauss-Markov

$$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0; \sigma_\varepsilon^2)$$

Elle n'est pas nécessaire pour que les MCO soient BLUE. Elle sert uniquement à rendre les tests **exacts** à petit échantillon.

Quand elle importe, et quand elle n'importe pas

Sur cinq cents observations, elle est inutile : le théorème central limite rend $\hat{\beta}_j$ approximativement normal quelle que soit la loi des erreurs.

Sur quinze observations, elle est décisive — et il faut alors regarder l'histogramme des résidus avant de publier le moindre t .

Ce que le théorème garantit exactement

Trois mots, trois portées

Mot	Ce qu'il signifie
Unbiased	$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$ — exige H2
Linear	on se restreint aux estimateurs combinaisons linéaires des y_i
Best	variance minimale dans cette classe — exige H3 et H4

La restriction cachée est dans « Linear »

Gauss-Markov ne dit pas que les MCO sont le meilleur estimateur possible. Il dit qu'ils sont le meilleur **parmi les estimateurs linéaires sans biais**.

Un estimateur non linéaire peut faire mieux — le maximum de vraisemblance, en particulier, dès qu'on connaît la loi des erreurs. C'est le chapitre 8 de l'inférence, et c'est ce que fait toute l'économétrie moderne.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. **Gauss-Markov** : sous H1 à H5, les MCO sont **BLUE**.
2. **H1 linéarité** — en les *paramètres* : les transformations de variables restent permises.
3. **H2 exogénéité** — $E(\varepsilon \mid X) = 0$: la seule qui concerne le **biais**.
4. **H3 homoscédasticité** et **H4 indépendance** : elles ne touchent que les écarts-types.
5. **H5 pas de colinéarité parfaite** : condition algébrique d'existence.
6. **H6 normalité** hors du théorème : utile aux petits échantillons seulement.

La suite

Six hypothèses, et aucune n'est vérifiée exactement sur des données réelles.

La question n'est donc pas *si* elles tombent, mais **laquelle**, et **avec quelles conséquences**. Le chapitre 13 en dresse la carte.