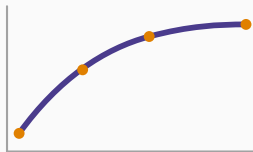


Économétrie financière

Chapitre 5 : Séries temporelles et cointégration



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Processus stationnaires et intégrés

La cointégration

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Les chapitres précédents modélisent les **rendements**. Mais les **prix** ont leur propre dynamique, généralement non stationnaire. Deux prix peuvent pourtant rester durablement « liés » dans le temps même si leurs rendements sont peu corrélés : c'est la **cointégration**, une notion de dépendance de long terme distincte de la corrélation.

Processus stationnaires et intégrés

Processus stationnaire, processus intégré

Un processus est **stationnaire** si sa moyenne, sa variance et ses autocovariances sont constantes dans le temps; il est **mean-reverting** (une déviation par rapport à sa moyenne finit par se résorber), donc partiellement prévisible. Un processus **intégré** (non stationnaire) ne l'est pas : la **marche aléatoire** $p_t = p_{t-1} + \varepsilon_t$ en est l'exemple emblématique — sa variance croît indéfiniment avec t , et la meilleure prévision du prix de demain est le prix d'aujourd'hui.

Pourquoi prévoir un prix individuel est vain

La plupart des prix d'actifs financiers sont, au moins approximativement, des processus intégrés : il est vain de vouloir prédire où sera un prix isolé dans dix ans. Mais l'**écart** entre deux prix peut, lui, être stationnaire — c'est précisément la cointégration, qui rend cet écart prévisible même si chaque prix pris isolément ne l'est pas.

La cointégration

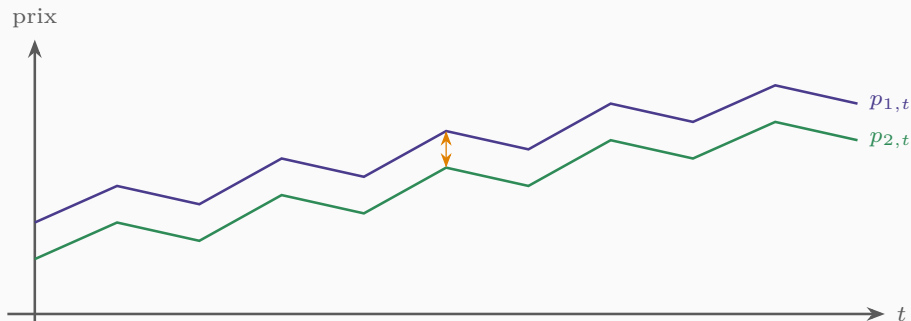
Définition

Cointégration

Deux séries de prix $p_{1,t}$ et $p_{2,t}$, chacune intégrée d'ordre 1 (notée $I(1)$), sont **cointégrées** s'il existe β tel que le spread

$$\varepsilon_t = p_{1,t} - \beta p_{2,t}$$

soit **stationnaire** ($I(0)$). Les deux prix sont alors « attachés » l'un à l'autre en longue période.



les deux prix « marchent » ensemble : l'écart reste borné

Procédure en deux étapes

1. **Régression de long terme** : régresser $p_{1,t}$ sur $p_{2,t}$ par MCO pour obtenir $\hat{\beta}$ et les résidus $\hat{\varepsilon}_t = p_{1,t} - \hat{\beta} p_{2,t}$.
2. **Test de stationnarité** des résidus (test de racine unitaire, par exemple Dickey-Fuller augmenté) : si H_0 (racine unitaire, non-stationnarité) est rejetée, le spread est stationnaire et les deux prix sont cointégrés.

Le modèle à correction d'erreur

Modèle à correction d'erreur (ECM)

Une fois la cointégration établie, la dynamique de court terme des **rendements** s'écrit

$$\Delta p_{1,t} = \phi \hat{\varepsilon}_{t-1} + (\text{termes de rendements retardés}) + u_t, \quad \phi < 0,$$

où $\hat{\varepsilon}_{t-1}$ est le spread retardé (l'écart à l'équilibre de long terme) et ϕ mesure la **vitesse de correction** : plus le spread s'écarte de zéro, plus p_1 est « rappelé » vers l'équilibre à la période suivante.

Exemple

Deux actions du même secteur ont des prix cointégrés avec $\hat{\beta} = 1,2$. Si $p_{1,t} = 48$ et $p_{2,t} = 38$, le spread est $\hat{\varepsilon}_t = 48 - 1,2 \times 38 = 2,4$ – supérieur à sa moyenne de long terme (zéro) : le modèle à correction d'erreur prédit un rendement **négatif** attendu pour p_1 (ou positif pour p_2) à la période suivante, ramenant le spread vers l'équilibre.

Application en finance : trading de paires (pairs trading)

Le **trading de paires** exploite directement la cointégration : dès que le spread entre deux actifs cointégrés s'écarte significativement de sa moyenne de long terme, on vend l'actif relativement cher et on achète l'actif relativement bon marché, en pariant sur le retour à l'équilibre – une stratégie

Synthèse

L'essentiel du chapitre 5

- Un processus stationnaire est mean-reverting et prévisible; un processus intégré (marche aléatoire) ne l'est pas.
- Deux prix $I(1)$ sont cointégrés si un spread $p_1 - \beta p_2$ est stationnaire — une dépendance de **long terme**, distincte de la corrélation des rendements.
- Méthode d'Engle-Granger : régression de long terme, puis test de racine unitaire sur les résidus.
- Le modèle à correction d'erreur relie la dynamique de court terme au retour vers l'équilibre de long terme.

Vers le chapitre 6

La cointégration modélise une dépendance particulière entre **prix**. Pour représenter la dépendance **entre rendements** au-delà de la seule corrélation — notamment le fait que les marchés chutent souvent ensemble plus fortement qu'ils ne montent ensemble — les copules offrent un cadre beaucoup plus riche.