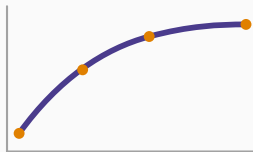


Économétrie financière

Chapitre 4 : Introduction aux modèles GARCH



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

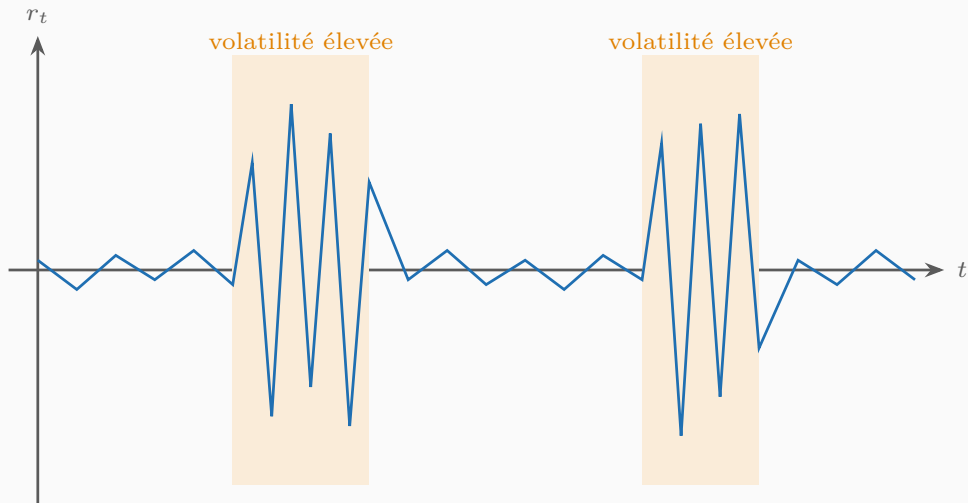
Le modèle GARCH(1,1)

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

La volatilité des rendements financiers n'est pas constante : des périodes de forte turbulence alternent avec des périodes calmes, et ces périodes se **regroupent dans le temps** — un fait documenté dès Mandelbrot (1963). Les modèles GARCH (Engle, 1982 ; Bollerslev, 1986) sont conçus spécifiquement pour capturer ce *clustering* de volatilité, là où la moyenne mobile et l'EWMA (chapitre 3) échouent.



Le modèle GARCH(1,1)

GARCH(1,1)

Le modèle **G**énéralisé **A**utorégressif **C**onditionnellement **H**étéroscédastique d'ordre (1, 1) s'écrit

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \alpha, \beta \geq 0.$$

Le mot **generalized** renvoie à la généralisation par Bollerslev (1986) du modèle **ARCH** d'Engle (1982), qui correspond au cas particulier $\beta = 0$: $\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2$.

Trois ingrédients, un seul modèle

La variance prévue à t combine trois informations : une composante **constante** (ω), le dernier **choc observé** (αr_{t-1}^2 — l'ARCH, réactivité à court terme), et la dernière **variance elle-même** ($\beta \sigma_{t-1}^2$ — la persistance). C'est cette dernière composante, absente de l'ARCH simple, qui donne au GARCH sa mémoire longue avec seulement deux paramètres.

Variance de long terme

Si $\alpha + \beta < 1$ (condition de **stationnarité**), le processus est covariance-stationnaire et admet une variance de long terme

$$V_L = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}.$$

En posant $\gamma = 1 - \alpha - \beta$, le modèle se réécrit $\sigma_t^2 = \gamma V_L + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$ — une moyenne pondérée de la variance de long terme, du dernier choc et de la dernière variance, les trois poids sommant à 1.

L'EWMA, cas limite du GARCH

Si $\gamma = 0$ (donc $\omega = 0$, $\alpha + \beta = 1$), il n'y a plus de retour vers une moyenne : le modèle dégénère exactement en une **EWMA**, avec $\alpha = 1 - \lambda$ et $\beta = \lambda$. L'EWMA du chapitre 3 est donc un cas particulier — non stationnaire — du GARCH(1,1).

Exemple

$\omega = 0,000004$, $\alpha = 0,08$, $\beta = 0,90$ (en variance journalière). $\alpha + \beta = 0,98 < 1$: le processus est stationnaire, $V_L = \frac{0,000004}{0,02} = 0,0002$, soit une volatilité de long terme $\sqrt{0,0002} \approx 1,41\%$ par jour. Si $\sigma_{t-1}^2 = 0,0003$ et $r_{t-1} = 2\%$:

$$\sigma_t^2 = 0,000004 + 0,08 \times 0,0004 + 0,90 \times 0,0003 = 0,000004 + 0,000032 + 0,00027 = 0,000306.$$

Estimation par maximum de vraisemblance

Les paramètres (ω, α, β) s'estiment en maximisant la log-vraisemblance, sous l'hypothèse (souvent) de normalité conditionnelle $r_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$:

$$\ell(\omega, \alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \sum_t \left[\ln(2\pi) + \ln \sigma_t^2 + \frac{r_t^2}{\sigma_t^2} \right],$$

maximisée numériquement (les σ_t^2 dépendant récursivement les uns des autres).

Prévision à horizon h

La prévision de variance à h jours **converge géométriquement** vers la variance de long terme :

$$\mathbb{E}_t[\sigma_{t+h}^2] = V_L + (\alpha + \beta)^{h-1}(\sigma_{t+1}^2 - V_L) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} V_L.$$

Contrairement à l'EWMA (prévision plate), le GARCH produit une véritable **structure par terme** de la volatilité : un choc récent s'estompe progressivement, à une vitesse gouvernée par $\alpha + \beta$ (la **persistance**).

Effet de levier : au-delà du GARCH symétrique

Le GARCH(1,1) traite un choc positif et un choc négatif de même ampleur **de façon identique** (r_{t-1}^2 ne dépend pas du signe). Or, empiriquement, un krach fait davantage monter la volatilité qu'une hausse équivalente (*effet de levier*). Des extensions asymétriques — GJR-GARCH, EGARCH — introduisent un terme supplémentaire pour capturer cette asymétrie, sans changer la logique générale du modèle.

Application en finance : VaR dynamique et pricing d'options

Une banque calculant la value at risk quotidienne d'un portefeuille substitue avantageusement la volatilité GARCH à une volatilité historique fixe : la VaR **s'ajuste automatiquement** à la hausse après un choc de marché, puis redescend progressivement — un comportement bien plus fidèle à la réalité que la VaR EWMA, plate au-delà du très court terme. En pricing d'options, la structure par terme du GARCH permet de construire une **surface de volatilité prévue**, comparée à la volatilité implicite du marché pour détecter des opportunités d'arbitrage de volatilité.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 4

- GARCH(1,1) : $\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$, stationnaire si $\alpha + \beta < 1$, variance de long terme $V_L = \omega / (1 - \alpha - \beta)$.
- L'EWMA est le cas limite non stationnaire ($\alpha + \beta = 1$) du GARCH.
- Estimation par maximum de vraisemblance; la prévision de variance converge géométriquement vers V_L (structure par terme), à la différence de la prévision plate de l'EWMA.
- Extensions asymétriques (GJR-GARCH, EGARCH) captent l'effet de levier.

Vers le chapitre 5

Les chapitres 1 à 4 modélisent les **rendements**. Mais les **prix** eux-mêmes ont une dynamique propre — souvent non stationnaire — et deux prix peuvent rester durablement « liés » sans que leurs rendements soient fortement corrélés : c'est la cointégration.