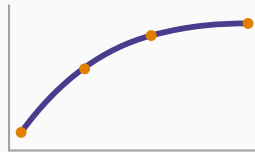


Économétrie financière

Chapitre 1 : Modèles factoriels



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Prérequis

Avant de commencer

Le modèle à un facteur

Modèles multifactoriels

Synthèse

Prérequis

Ce que ce cours suppose acquis

Le cours qui précède

Économétrie avancée, dont ce cours prolonge les séries temporelles vers les données financières.

Les notions mobilisées

Le modèle linéaire en écriture matricielle. La stationnarité, l'autocorrélation, les tests de racine unitaire. L'estimation par maximum de vraisemblance.

Ce que ce cours ajoute

Une rentabilité d'actif n'obéit à aucune des hypothèses commodes : sa volatilité change, ses queues sont épaisses, ses corrélations se resserrent au pire moment.

Le cours part de ces faits stylisés et construit les modèles qui les acceptent, plutôt que de les traiter comme des anomalies.

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Un gérant de portefeuille doit comprendre **d'où vient** le rendement et le risque de ses positions. Les modèles factoriels répondent à cette question en exprimant le rendement de chaque actif comme une fonction linéaire d'un petit nombre de **facteurs de risque** communs — l'outil de base de la gestion et de la mesure du risque de portefeuille.

Le modèle à un facteur

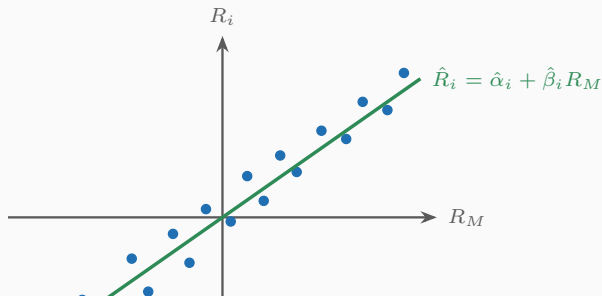
Le modèle de marché

Modèle de marché (single-index model)

Le rendement R_i d'un actif i se décompose selon

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i, \quad \mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0, \quad \text{Cov}(R_M, \varepsilon_i) = 0,$$

où R_M est le rendement d'un indice de marché, α_i la performance non expliquée par le marché, et β_i la **sensibilité** (bêta) de l'actif au marché, estimée par régression linéaire simple (moindres carrés ordinaires).



Risque systématique et risque spécifique

Sous les hypothèses du modèle,

$$\text{Var}(R_i) = \underbrace{\beta_i^2 \text{Var}(R_M)}_{\text{risque systématique}} + \underbrace{\text{Var}(\varepsilon_i)}_{\text{risque spécifique}} .$$

Le risque **systématique** provient du facteur commun (non diversifiable); le risque **spécifique** (idiosyncratique) est propre à l'actif et se diversifie en portefeuille.

Exemple

Un actif a $\beta_i = 1.4$, $\text{Var}(R_M) = 4\%^2$ et $\text{Var}(\varepsilon_i) = 3\%^2$. Risque systématique : $1.4^2 \times 16 = 31.36$ (en $\%^2$); risque spécifique : 9. Variance totale $40.36\%^2$, soit un écart-type de 6.35%; 77.7% de la variance est d'origine systématique ($31.36/40.36$).

Modèles multifactoriels

Modèle multifactoriel

Avec K facteurs $F_1, \dots, F_K$:

$$R_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^K \beta_{ik} F_k + \varepsilon_i.$$

Les β_{ik} (sensibilités factorielles) s'estiment par régression multiple (chapitre régression multiple, Licence).

Quels facteurs choisir?

Les facteurs peuvent être des indices de marché larges, des facteurs sectoriels, des facteurs de **style** (valeur, croissance, momentum, taille — factoriels à la Fama-French), des facteurs macroéconomiques (taux d'intérêt, inflation), ou des facteurs **statistiques** obtenus par analyse en composantes principales (chapitre 2) — utile quand aucune interprétation économique n'est requise.

Risque de portefeuille dans un modèle multifactoriel

Décomposition au niveau du portefeuille

Pour un portefeuille de poids $w = (w_1, \dots, w_n)^\top$, le bêta de portefeuille par rapport au facteur k est $\beta_{P,k} = \sum_i w_i \beta_{ik}$, et, en notant Ω la matrice de covariance des facteurs et B la matrice des sensibilités,

$$\text{Var}(R_P) = \beta_P^\top \Omega \beta_P + \sum_i w_i^2 \text{Var}(\varepsilon_i),$$

où le second terme (risque spécifique agrégé) tend vers 0 à mesure que le portefeuille se diversifie, tandis que le premier terme (risque systématique) subsiste.

Application en gestion : attribution de performance et tracking error

Un gérant actif compare son portefeuille à un indice de référence (benchmark). Le modèle factoriel permet l'**attribution de performance** : quelle part du rendement provient de l'exposition aux facteurs de style (bêta), et quelle part de la sélection de titres (alpha, le résidu)? La **tracking error** — l'écart-type de $R_P - R_{\text{benchmark}}$ — se décompose de la même façon en une composante systématique (différences d'exposition factorielle) et une composante spécifique (paris actifs sur des titres individuels), un indicateur clé du risque actif pris par le gérant.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 1

- Modèle de marché : $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$; le CAPM en est l'interprétation d'équilibre ($\alpha_i = 0$).
- Risque total = risque systématique ($\beta^2 \text{Var}(R_M)$) + risque spécifique ($\text{Var}(\varepsilon)$).
- Modèle multifactoriel : généralise à K facteurs (marché, style, macro, statistiques), estimé par régression multiple.
- Le risque spécifique se diversifie en portefeuille; le risque systématique, non.

Vers le chapitre 2

Quand aucun facteur économique évident n'est disponible — ou pour réduire la dimension d'un grand nombre d'actifs corrélés — l'analyse en composantes principales construit des facteurs **statistiques**, directement à partir de la matrice de covariance des rendements.