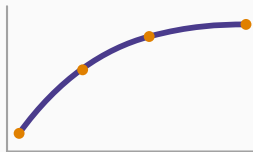


Économétrie financière

Chapitre 6 : Introduction aux copules



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Le théorème de Sklar

Deux familles usuelles

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

La corrélation résume complètement la dépendance entre deux variables seulement dans le cas particulier des distributions **elliptiques** (normale, Student). Or les marchés financiers ne s'y conforment pas : les grands mouvements négatifs sont souvent bien plus liés entre eux que ne le suggère la corrélation moyenne. Les copules offrent un cadre général pour représenter **toute** structure de dépendance, indépendamment des lois marginales.

Le théorème de Sklar

Copule et théorème de Sklar

Une **copule** $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ est la fonction de répartition jointe de variables uniformes sur $[0, 1]$. Le **théorème de Sklar** énonce que toute fonction de répartition jointe F de marges F_X, F_Y s'écrit

$$F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

pour une copule C unique (si les marges sont continues). Réciproquement, toute copule combinée à des marges arbitraires produit une loi jointe valide.

L'idée clé : séparer forme et lien

Le théorème de Sklar sépare complètement deux choses : le comportement **individuel** de chaque variable (ses marges — normale, Student, gamma, etc., éventuellement différentes pour chaque actif) et la **structure de dépendance** entre elles (la copule). On peut ainsi combiner des marges très différentes avec n'importe quelle copule, ce qui serait impossible en ne travaillant qu'avec des lois jointes « toutes faites » comme la normale multivariée.

Deux familles usuelles

Copule gaussienne

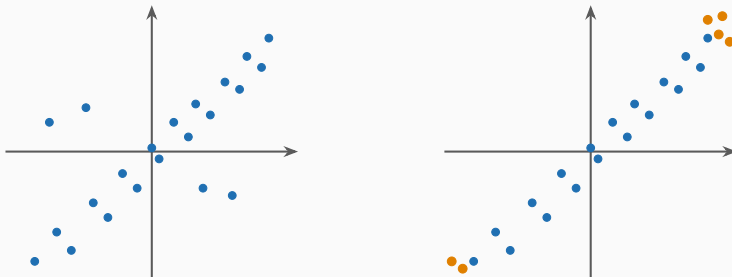
$$C_{\rho}^{\text{Gauss}}(u, v) = \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)),$$

où Φ_{ρ} est la fonction de répartition normale bivariée de corrélation ρ et Φ^{-1} l'inverse de la loi normale standard. C'est la copule implicite de la loi normale multivariée : elle ne fait qu'imposer la **structure de dépendance** de la loi normale, quelles que soient les marges effectivement utilisées.

Copule de Student et dépendance de queue

Dépendance de queue

Le **coefficient de dépendance de queue** $\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(u) \mid X > F_X^{-1}(u))$ mesure la probabilité d'un événement extrême sur Y sachant un événement extrême sur X . Pour la copule **gaussienne**, $\lambda_U = 0$ dès que $\rho < 1$: les événements extrêmes y sont **asymptotiquement indépendants**, quelle que soit la force de la corrélation. La copule de **Student**, construite sur la loi de Student bivariée à ν degrés de liberté, a au contraire $\lambda_U > 0$: elle capture la **dépendance de queue**, c'est-à-dire la tendance des marchés à s'effondrer ensemble plus souvent qu'ils ne le feraient sous hypothèse gaussienne. Plus ν est petit, plus la dépendance de queue est forte.



Synthèse

L'essentiel du chapitre 6

- Sklar : $F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$ — la copule isole la structure de dépendance des lois marginales.
- Copule gaussienne : aucune dépendance de queue ($\lambda_U = 0$), quelle que soit $\rho < 1$.
- Copule de Student : dépendance de queue positive, d'autant plus forte que ν est petit — plus réaliste pour les crises de marché.
- Le choix de la copule a des conséquences concrètes et importantes sur l'évaluation du risque extrême d'un portefeuille.

Fin de ce bloc

Ces six chapitres — des modèles factoriels aux copules — donnent les outils de modélisation de rendements, de risque et de dépendance qui sous-tendent la gestion de portefeuille moderne. Les chapitres 7 et 8, à venir, compléteront ce bloc d'économétrie financière.