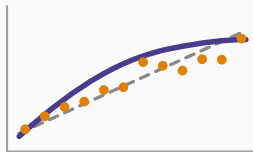


Économétrie avancée

Annexe D : Rappels d'algèbre matricielle



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Définitions de base

Opérations matricielles

Indépendance linéaire, rang, formes quadratiques

Matrices idempotentes

Moments de vecteurs aléatoires

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Toute la régression multiple des chapitres 2 à 10 a été présentée coefficient par coefficient, somme par somme. L'écriture **matricielle** condense l'ensemble du modèle — n observations, k régresseurs — en quelques équations compactes, et généralise immédiatement chaque résultat déjà établi. Ce chapitre rassemble les outils d'algèbre matricielle nécessaires au chapitre 14, qui reformule la régression MCO dans ce langage.

Définitions de base

Matrice, vecteur, matrice carrée

Une **matrice** $m \times n$ est un tableau rectangulaire de nombres à m lignes et n colonnes, notée $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Un **vecteur ligne** est une matrice $1 \times n$; un **vecteur colonne**, une matrice $n \times 1$. Une matrice **carrée** a autant de lignes que de colonnes.

Matrices diagonale, identité, nulle

Une matrice **diagonale** n'a de termes non nuls que sur sa diagonale principale. La matrice **identité** $\mathbf{I}_n$ est diagonale avec des 1 sur la diagonale — l'élément neutre de la multiplication matricielle. La matrice **nulle** $\mathbf{0}$ a tous ses termes égaux à zéro.

Opérations matricielles

Règles de calcul de base

L'addition $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$ exige des dimensions identiques. Le produit $\mathbf{AB}$ n'est défini que si le nombre de colonnes de $\mathbf{A}$ égale le nombre de lignes de $\mathbf{B}$; l'élément (i, j) de $\mathbf{AB}$ est le produit scalaire de la ligne i de $\mathbf{A}$ par la colonne j de $\mathbf{B}$.

La non-commutativité, un piège classique

Contrairement à la multiplication de nombres réels, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ en général — et l'un des deux produits peut même ne pas exister. C'est la source d'erreurs la plus fréquente en calcul matriciel : l'ordre des facteurs compte toujours.

Transposée

La **transposée** $\mathbf{A}'$ échange lignes et colonnes de $\mathbf{A}$. Propriété clé pour la suite : $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ (l'ordre s'inverse). Une matrice carrée est **symétrique** si $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$; pour toute matrice $\mathbf{X}$ ($n \times k$), $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ est toujours définie et **toujours symétrique** — c'est exactement la matrice qui apparaîtra au cœur de l'estimateur MCO au chapitre 14.

Trace

$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_i a_{ii}$ (somme des termes diagonaux, matrice carrée uniquement). Propriété utile : $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$, même quand $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Inverse

$\mathbf{A}$ (carrée) est **inversible** (non singulière) s'il existe $\mathbf{A}^{-1}$ tel que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. Propriété essentielle : $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ — encore un renversement de l'ordre. L'inverse généralise la division scalaire : résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ revient à écrire $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, exactement l'opération centrale du système d'équations normales des MCO.

Renvoi : ce chapitre prolonge le cours d'algèbre linéaire

Les notions d'inversion, de rang et de déterminant ont déjà été traitées en détail — avec exemples économiques (modèle de Leontief, systèmes de prix d'équilibre) — dans les chapitres 3, 4 et 5 du cours d'**algèbre linéaire** (Licence). Ce chapitre ne fait qu'en rappeler l'essentiel dans la notation utilisée pour la régression.

Indépendance linéaire, rang, formes quadratiques

Indépendance linéaire et rang

Des vecteurs $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ sont **linéairement indépendants** si la seule combinaison $a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ est $a_1 = \dots = a_n = 0$. Le **rang** d'une matrice est le nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes. Une matrice $n \times k$ a **rang plein de colonnes** si son rang vaut k — condition exacte d'absence de colinéarité parfaite (hypothèse MLR.3 des chapitres 2–3, reformulée matriciellement).

Forme quadratique, définie positive

Pour $\mathbf{A}$ symétrique $n \times n$, la **forme quadratique** est $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$. $\mathbf{A}$ est **définie positive** si $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; **semi-définie positive** si $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$. Résultat central : si $\mathbf{X}$ est $n \times k$ de rang plein k , alors $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ est définie positive, donc **inversible** — c'est la condition exacte sous laquelle l'estimateur MCO matriciel existe et est unique.

Application : variance de portefeuille et matrices définies positives

La variance d'un portefeuille, $\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}$ où Σ est la matrice de covariance des rendements, est une forme quadratique — sa positivité pour tout vecteur de poids $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ (matrice Σ définie positive) garantit qu'aucun portefeuille non trivial n'a une variance nulle ou négative. C'est exactement le rôle joué par les formes quadratiques au chapitre 7 du cours d'algèbre linéaire, appliqué à la gestion de portefeuille.

Matrices idempotentes

Matrice idempotente

A symétrique est **idempotente** si $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Propriété clé : $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$. Les matrices $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ et $\mathbf{M} = \mathbf{I}_n - \mathbf{P}$ (avec $\text{rang}(\mathbf{X}) = k$) sont toutes deux idempotentes, de rangs respectifs k et $n - k$.

Une préfiguration directe du chapitre 14

P et **M** ne sont pas des objets abstraits : **P****y** produira exactement les **valeurs ajustées** $\hat{\mathbf{y}}$ de la régression MCO, et **M****y** les **résidus** $\hat{\mathbf{u}}$. Le rang $n - k$ de **M** n'est autre que le nombre de degrés de liberté $n - k - 1$ (en comptant l'intercept) qui apparaît dans tous les tests t et F depuis le chapitre 4 — cette coïncidence n'en est pas une : elle sera démontrée au chapitre suivant.

Moments de vecteurs aléatoires

Vecteur aléatoire : espérance et variance

Pour un vecteur aléatoire $\mathbf{y}$ ($n \times 1$), $E(\mathbf{y})$ est le vecteur des espérances, et

$$\text{Var}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

est la **matrice de variance-covariance**, symétrique, avec les variances sur la diagonale et les covariances hors diagonale. Si les composantes de $\mathbf{y}$ sont non corrélées et de même variance σ^2 , $\text{Var}(\mathbf{y}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ – c'est précisément l'écriture matricielle de l'hypothèse d'homoscédasticité et d'absence d'autocorrélation réunies (chapitres 8 et 10) en une seule condition.

Transformation linéaire d'un vecteur aléatoire

Pour $\mathbf{A}$ non aléatoire, $E(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}E(\mathbf{y}) + \mathbf{b}$ et $\text{Var}(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}) = \mathbf{A} \text{Var}(\mathbf{y}) \mathbf{A}'$ – la généralisation matricielle exacte des propriétés E.2 et VAR.2 du chapitre 11.

Normale multivariée, χ^2 , t , F en notation matricielle

$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ est entièrement caractérisée par sa moyenne et sa matrice de covariance; toute combinaison linéaire $\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ reste normale. Si $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ et $\mathbf{A}$ est symétrique idempotente de rang q , alors $\mathbf{u}'\mathbf{A}\mathbf{u} \sim \chi_q^2$; et si $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ pour deux matrices idempotentes, les formes quadratiques associées sont **indépendantes** — le résultat technique exact qui permettra, au chapitre 14, de redémontrer que t et F suivent leurs lois de référence sous le modèle linéaire classique.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 13

- Le produit matriciel n'est pas commutatif; la transposée inverse l'ordre des facteurs dans un produit.
- $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ est toujours symétrique, et définie positive (donc inversible) si et seulement si $\mathbf{X}$ est de rang plein de colonnes — condition matricielle exacte de l'absence de colinéarité parfaite.
- Les matrices idempotentes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ préfigurent directement les valeurs ajustées et les résidus de la régression MCO, avec des rangs égaux aux degrés de liberté usuels.
- La matrice de variance-covariance $\sigma^2\mathbf{I}_n$ condense en une seule écriture l'homoscédasticité et l'absence d'autocorrélation.

Vers le chapitre 14

Tous les outils sont maintenant réunis. Le dernier chapitre du cours applique directement ces résultats pour redériver, en notation matricielle compacte, l'estimateur MCO, son non-biais, sa matrice de variance-covariance, le théorème de Gauss-Markov, et l'inférence exacte sous normalité — une synthèse de l'ensemble du cours.