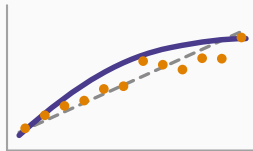


Économétrie avancée

Chapitre 5 : Régression multiple — propriétés asymptotiques des MCO



Avant de commencer

Convergence

Normalité asymptotique

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Les résultats du chapitre 4 (tests t et F exacts) reposent sur l'hypothèse de normalité MLR.6 — rarement vérifiée exactement. Ce chapitre montre que l'essentiel de l'inférence **survit** sans cette hypothèse, à condition que l'échantillon soit suffisamment grand : c'est le domaine des propriétés **asymptotiques**, c'est-à-dire valables quand $n \rightarrow \infty$.

Convergence

Convergence (consistance)

Un estimateur $\hat{\beta}_j$ est **convergent** (consistant) si $\hat{\beta}_j \xrightarrow{p} \beta_j$ quand $n \rightarrow \infty$: la probabilité que $\hat{\beta}_j$ s'écarte de β_j tend vers zéro à mesure que l'échantillon grandit. Sous MLR.1–4, les MCO sont non biaisés et **donc** convergents; mais la convergence peut aussi être établie sous une hypothèse **plus faible** que MLR.4 — la simple absence de corrélation entre u et chaque régresseur, plutôt que l'espérance conditionnelle nulle.

Non-biais et convergence : deux notions distinctes

Le non-biais est une propriété **à taille d'échantillon fixée**; la convergence est une propriété **quand n grandit**. Un estimateur peut être biaisé à taille finie tout en étant convergent (le biais s'atténue avec n) — un cas fréquent pour des estimateurs non linéaires (par exemple, le maximum de vraisemblance d'un modèle GARCH, chapitre 4 du cours d'économétrie financière).

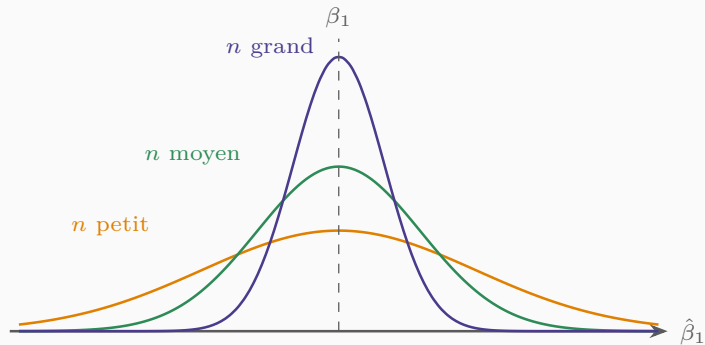
Normalité asymptotique

Normalité asymptotique des MCO

Sous MLR.1 à MLR.5 (sans MLR.6), et pour n suffisamment grand, le théorème central limite (chapitre 7, statistiques) implique

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_j - \beta_j) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{a_j}^2),$$

de sorte que les statistiques t et F du chapitre 4 restent **approximativement** valides en grand échantillon, même si u n'est pas exactement normal.



Pourquoi c'est une bonne nouvelle

En pratique, les termes d'erreur ne sont jamais parfaitement normaux. La normalité **asymptotique** rassure : dès que l'échantillon est raisonnablement grand (règle empirique : quelques dizaines à quelques centaines d'observations selon le contexte), l'inférence usuelle (tests t , F , intervalles de confiance) reste approximativement fiable, **sans** devoir supposer MLR.6.

Efficacité asymptotique

Sous les hypothèses de Gauss-Markov (MLR.1–5) et des conditions techniques additionnelles sur les moments de u , l'estimateur MCO est **asymptotiquement efficace** : parmi une large classe d'estimateurs (pas seulement les estimateurs linéaires, comme pour le théorème de Gauss-Markov à taille finie), aucun n'a, en grand échantillon, une variance asymptotique plus faible.

Le test du multiplicateur de Lagrange

Une alternative asymptotique au test F

Le test du **multiplicateur de Lagrange** (test LM, ou *score test*) offre une autre façon de tester des restrictions d'exclusion, asymptotiquement équivalente au test F : on régresse les résidus du modèle **contraint** sur **tous** les régresseurs (contraints et exclus), et $LM = n \times R_{\text{aux}}^2$ suit approximativement un χ_q^2 sous H_0 (q = nombre de restrictions). Il est particulièrement pratique quand ré-estimer le modèle non contraint est coûteux.

Application en finance : pourquoi les grands échantillons comptent tant

Toute l'économétrie financière des chapitres précédents s'appuie sur ces résultats asymptotiques : l'estimation par **maximum de vraisemblance** d'un modèle GARCH (chapitre 4) n'est justifiée que par ses propriétés en grand échantillon (convergence, normalité asymptotique); les tests de racine unitaire de type Dickey-Fuller utilisés pour la cointégration (chapitre 5) ont des distributions **non standard**, tabulées par simulation, précisément parce qu'on est à la frontière de la théorie asymptotique classique. La disponibilité de séries financières longues (rendements quotidiens sur plusieurs années, soit plusieurs milliers d'observations) est ce qui rend ces méthodes praticables.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 5

- Convergence : $\hat{\beta}_j \xrightarrow{p} \beta_j$, propriété plus faible et plus générale que le non-biais.
- Sous MLR.1–5 (sans MLR.6), les MCO sont asymptotiquement normaux : tests t/F approximativement valides en grand échantillon.
- L'estimateur MCO est asymptotiquement efficace sous Gauss-Markov.
- Le test LM offre une alternative asymptotique au test F , utile quand le modèle non contraint est coûteux à estimer.

Fin de ce premier bloc

Ces cinq chapitres posent les fondations théoriques — estimation, inférence exacte et asymptotique — sur lesquelles reposent tous les modèles plus spécialisés du bloc économétrie financière (facteurs, GARCH, cointégration) déjà vus, et ceux à venir dans les prochains chapitres de ce bloc (variables instrumentales, données de panel).