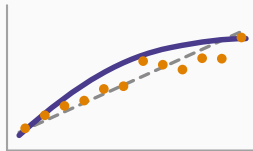


Économétrie avancée

Annexe A : Rappels d'outils mathématiques de base



Avant de commencer

L'opérateur somme et les statistiques descriptives

Fonctions linéaires et non linéaires

Fonctions quadratique, logarithmique et exponentielle

Éléments de calcul différentiel

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Ce dernier chapitre boucle le programme en revenant aux outils mathématiques élémentaires mobilisés depuis le chapitre 1 : opérateur somme, fonctions linéaires et non linéaires, pourcentages, logarithme, exponentielle, dérivées. Rien de nouveau conceptuellement, mais une clarification utile de manipulations utilisées silencieusement dans presque tous les chapitres précédents — en particulier la distinction entre variation en points de pourcentage et variation en pourcentage, source d'erreurs fréquentes.

L'opérateur somme et les statistiques descriptives

Trois propriétés utiles

Pour une constante c et des suites $\{x_i\}, \{y_i\}$: $\sum_{i=1}^n c = nc$; $\sum_{i=1}^n cx_i = c \sum_{i=1}^n x_i$;
 $\sum_{i=1}^n (ax_i + by_i) = a \sum x_i + b \sum y_i$. En revanche, la somme des rapports **n'est pas** le rapport des sommes, et la somme des carrés **n'est pas** le carré de la somme — deux pièges algébriques fréquents.

Moyenne, médiane et écarts à la moyenne

La moyenne $\bar{x} = n^{-1} \sum_i x_i$ vérifie $\sum_i (x_i - \bar{x}) = 0$: les écarts à la moyenne se compensent toujours exactement. On a aussi $\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2$, identité omniprésente dans les calculs de variance et de somme des carrés des chapitres 2 à 5. La **médiane**, moins sensible aux valeurs extrêmes que la moyenne, est souvent préférée pour décrire des variables comme le revenu ou le prix des logements.

Fonctions linéaires et non linéaires

Fonction linéaire et effet partiel

Pour $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$, la variation de y est $\Delta y = \beta_1 \Delta x_1 + \beta_2 \Delta x_2$: chaque β_j est l'**effet partiel** de x_j sur y , *toutes choses égales par ailleurs* ($\Delta x_{-j} = 0$) – c'est la traduction mathématique exacte de la clause *ceteris paribus* omniprésente dans ce cours depuis le chapitre 1.

Propension marginale versus propension moyenne

Pour $\text{housing} = 164 + 0,27 \cdot \text{income}$, la **propension marginale** à consommer du logement est constante (0,27), mais la **propension moyenne**, $164/\text{income} + 0,27$, décroît avec le revenu et ne converge vers la propension marginale que pour un revenu élevé – illustration simple de pourquoi les fonctions linéaires échouent à décrire certaines relations économiques sur toute la plage des valeurs.

Ne pas confondre les deux

La variation proportionnelle est $\Delta x/x_0$, la **variation en pourcentage** est $100 \cdot \Delta x/x_0$. Si x est elle-même une proportion ou un pourcentage (ex. : un taux de chômage passant de 24 % à 30 %), la **variation en points de pourcentage** ($30 - 24 = 6$ points) diffère radicalement de la **variation en pourcentage** ($100 \times 6/24 \approx 25\%$) – deux nombres corrects mais qui répondent à des questions différentes, et une source classique de confusion, y compris dans le débat public.

La hausse de la taxe de vente au Michigan (1994)

Le passage de 4 % à 6 % peut légitimement se décrire comme une hausse de « deux points de pourcentage » (ce que soulignaient les partisans) ou comme une hausse de « 50 % » du taux ($100 \times 2/4$, ce que soulignaient les opposants). Les deux formulations sont mathématiquement exactes ; seul le choix de la mesure diffère selon l'argument que l'on veut défendre.

Fonctions quadratique,
logarithmique et exponentielle

Fonction quadratique et point de retournement

Pour $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ avec $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$, la pente approchée est $\Delta y / \Delta x \approx \beta_1 + 2\beta_2 x$ et le maximum est atteint en $x^* = -\beta_1 / (2\beta_2)$ – c'est exactement la logique du point de retournement expérience-salaire utilisée au chapitre 6. Au-delà de x^* , l'effet marginal devient négatif : un rappel que la spécification quadratique n'est qu'une approximation locale, pas une description valable sur tout le domaine.

Logarithme, élasticité et semi-élasticité

Pour de petites variations, $\log(x_1) - \log(x_0) \approx \Delta x / x_0$, d'où $100 \cdot \Delta \log(x) \approx \% \Delta x$. Trois spécifications combinant $\log$ résument l'essentiel des modèles rencontrés dans ce cours :

$\log(y) = \beta_0 + \beta_1 \log(x)$ donne une **élasticité constante** β_1 ; $\log(y) = \beta_0 + \beta_1 x$ donne une **semi-élasticité** $100\beta_1$ (variation en % de y pour une hausse d'une unité de x); $y = \beta_0 + \beta_1 \log(x)$ donne $\Delta y \approx (\beta_1 / 100) \% \Delta x$ (variation en unités de y pour une hausse de 1 % de x).

Trois lectures d'une même famille de modèles

$\log(wage) = 2,78 + 0,094 educ$: chaque année d'études supplémentaire augmente le salaire d'environ 9,4 % (semi-élasticité). $\log(q) = 4,7 - 1,25 \log(p)$: l'élasticité-prix de la demande est $-1,25$ (constante, quel que soit le niveau de prix). $hours = 33 + 45,1 \log(wage)$: une hausse de salaire de 10 % augmente les heures travaillées d'environ $0,451 \times 10 \approx 4,5$ heures.

La fonction exponentielle

$\exp(\cdot)$ est l'inverse du logarithme : $\log[\exp(x)] = x$, $\exp[\log(x)] = x$ pour $x > 0$. Elle apparaît chaque fois qu'un modèle est spécifié en $\log(y) = \beta_0 + \beta_1 x$ et que l'on souhaite revenir à $y = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$ – exactement la problématique de la retransformation rencontrée au chapitre 6 pour prédire y à partir d'un modèle en $\log(y)$.

Éléments de calcul différentiel

La dérivée comme approximation locale

Dérivée et pente locale

Pour $y = f(x)$, $\Delta y \approx (df/dx)|_{x_0} \cdot \Delta x$ pour de petites variations. Dérivées usuelles :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \Rightarrow dy/dx = \beta_1 + 2\beta_2 x; y = \beta_0 + \beta_1 \log(x) \Rightarrow dy/dx = \beta_1/x;$$

$y = \exp(\beta_0 + \beta_1 x) \Rightarrow dy/dx = \beta_1 \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$. Ces formules justifient rigoureusement toutes les approximations utilisées empiriquement dans ce cours pour interpréter des coefficients non linéaires.

Dérivées partielles et conditions du premier ordre

Pour $y = f(x_1, x_2)$, la dérivée partielle $\partial y / \partial x_1$ traite x_2 comme une constante — c'est la généralisation calculatoire de l'effet partiel défini plus haut. Pour minimiser ou maximiser une fonction de plusieurs variables, une condition nécessaire est l'annulation simultanée de **toutes** les dérivées partielles : $\partial f / \partial x_j = 0$ pour tout j . C'est précisément ce principe, appliqué à la somme des carrés des résidus, qui engendre les équations normales des MCO dès le chapitre 3 — et sous forme matricielle au chapitre 14.

Effet partiel dans un modèle avec interaction

Pour $wage = 3,10 + 0,41 educ + 0,19 exper - 0,004 exper^2 + 0,007 educ \times exper$, l'effet

Synthèse

L'essentiel du chapitre 19

- L'opérateur somme obéit à des règles de linéarité simples, mais ne distribue ni sur les rapports ni sur les carrés.
- Un effet partiel (constant en linéaire, variable en non linéaire) formalise la clause *ceteris paribus*; sa version calculatoire est la dérivée (ou dérivée partielle).
- Variation en pourcentage et variation en points de pourcentage sont deux quantités différentes dès que la variable étudiée est elle-même un taux.
- Les spécifications combinant logarithme et niveau (élasticité, semi-élasticité) résument la quasi-totalité des interprétations de coefficients utilisées dans ce cours.
- Les conditions du premier ordre (dérivées partielles nulles) sont le principe mathématique unique derrière l'estimation par moindres carrés, du chapitre 3 au chapitre 14.

Fin du programme

Ce chapitre clôt le parcours d'économétrie avancée : des fondations de la régression simple (chapitre 1) aux modèles à variables limitées et à la cointégration (chapitres 16-17), en passant par les rappels de probabilité, de statistique et d'algèbre matricielle qui en soutiennent la théorie. Les outils rassemblés ici — sommes, effets partiels, logarithmes, dérivées — sont ceux qu'un économètre mobilise, souvent