

Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 1 : Du temps discret au temps continu



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Prérequis

Avant de commencer

La marche aléatoire, point de départ

Synthèse

Prérequis

Les cours qui précèdent

Économétrie avancée et *Économétrie financière*. Le cours les prolonge et n'y revient pas.

Les notions mobilisées

De l'économétrie avancée : le processus autorégressif, et le cas limite $\rho = 1$ — la marche aléatoire, à variance croissante.

De l'économétrie financière : la volatilité conditionnelle et les faits stylisés des rendements.

Des mathématiques de Licence : la dérivée, le **développement de Taylor à l'ordre deux**, l'intégrale et la loi normale.

Ce que ce cours ajoute

Une seule chose, mais elle change tout : le temps continu.

Un prix cote sans interruption, une couverture s'ajuste sans interruption. Le pas de temps n'est pas une donnée du problème financier : c'est une contrainte de la mesure, et un bon modèle ne doit pas en dépendre.

Avant de commencer

Ce cours ne part pas de zéro. Il prolonge deux enseignements.

De l'économétrie avancée

Le processus autorégressif $y_t = \rho y_{t-1} + e_t$, et le cas limite $\rho = 1$ – la **marche aléatoire**, série $I(1)$ à racine unitaire, dont la variance croît avec le temps.

De l'économétrie financière

Les faits stylisés des rendements : volatilité **en grappes**, queues **épaisses**, corrélations qui se resserrent au pire moment. Vous savez donc déjà qu'une volatilité constante est une fiction.

Une seule chose, mais elle change tout : le **temps continu**.

Pourquoi ce n'est pas un caprice de mathématicien

Un prix cote sans interruption. Une couverture s'ajuste sans interruption. Le pas de temps — le jour, l'heure — n'est pas une donnée du problème financier : c'est une contrainte de la mesure. Un bon modèle ne doit pas en dépendre.

La question du cours, en une phrase

Comment écrire l'équation qui gouverne le prix d'une action, et comment s'en servir pour évaluer une option écrite sur cette action ?

La marche aléatoire, point de départ

Marche aléatoire symétrique

Partant de y_0 , on ajoute à chaque période un pas de taille fixe δ , vers le haut ou vers le bas avec probabilité $1/2$:

$$y_k = y_{k-1} + \delta \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = \pm 1 \text{ indépendants.}$$

Après n pas :

$$E(y_n) = y_0, \quad \text{Var}(y_n) = n \delta^2.$$

Les deux traits qui vont survivre

L'espérance ne bouge pas — c'est le caractère de **martingale**. La variance croît **proportionnellement au temps** — c'est ce qui interdit à la série de se stabiliser.

Découpons maintenant l'intervalle $[0, t]$ en n pas de durée $\Delta t = t/n$, et faisons tendre n vers l'infini.

$$\text{Var}(y_n) = n \delta^2 = \frac{t}{\Delta t} \delta^2.$$

Trois choix possibles pour l'amplitude δ

- $\delta = \Delta t$: la variance vaut $t \Delta t \rightarrow 0$. La limite est **déterministe**, tout le hasard a disparu.
- $\delta = \text{constante}$: la variance vaut $t/\Delta t \rightarrow \infty$. La limite **explose**.
- $\delta = \sigma\sqrt{\Delta t}$: la variance vaut $\sigma^2 t$, **finie et non nulle**.

Le fait à retenir de ce chapitre

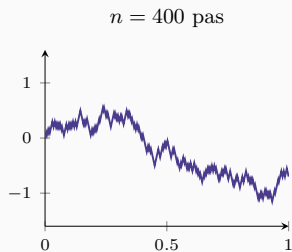
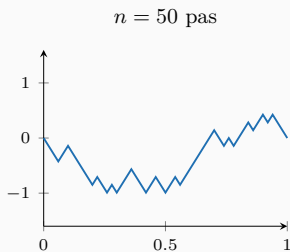
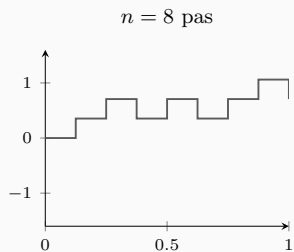
Le hasard s'accumule en $\sqrt{t}$, pas en t . C'est la seule échelle qui laisse quelque chose à la limite : ni rien, ni l'infini.

Ce n'est pas une astuce de calcul. C'est la signature de l'**indépendance** : ce sont les variances qui s'additionnent, pas les écarts-types.

La règle de la racine carrée du temps

De là vient la convention qui annualise une volatilité quotidienne en la multipliant par $\sqrt{252}$. Le chapitre 8 dira à quelles conditions elle est légitime — et le chapitre 12 pourquoi elle est fragile.

Le passage à la limite, vu de près



Même intervalle, même variance finale. Seul le pas change.

Théorème de Donsker (énoncé informel)

Quand $\Delta t \rightarrow 0$ avec des pas d'amplitude $\sigma\sqrt{\Delta t}$, la marche aléatoire converge — au sens des lois sur l'espace des fonctions continues — vers un processus limite unique : le **mouvement brownien**.

Pourquoi ce résultat est remarquable

La loi des pas n'intervient pas. Pile ou face, gaussien, uniforme : pourvu que la variance soit finie, la limite est **la même**. C'est un théorème central limite, non plus sur une somme, mais sur une trajectoire entière.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 1

- La finance travaille en temps continu parce que le pas d'observation ne doit pas figurer dans le modèle.
- La marche aléatoire raffinée converge, à condition que ses pas soient d'amplitude $\sigma\sqrt{\Delta t}$.
- La variance croît **linéairement** en temps, l'écart-type en $\sqrt{t}$.
- La limite est unique et ne dépend pas de la loi des pas : c'est le mouvement brownien.

Vers le chapitre 2

Nous avons obtenu un objet par passage à la limite. Le chapitre suivant l'adopte comme **définition** et en tire les propriétés — dont une, la non-dérivabilité, qui rendra tout le calcul différentiel classique inutilisable.