

Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 12 : Simuler, et ce qui vient après



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Discrétiser une équation stochastique

Monte Carlo

Les limites, et la suite

Synthèse

Avant de commencer

La formule fermée est l'exception

Black-Scholes ne se résout explicitement que pour un payoff simple, un sous-jacent, une volatilité constante. Options asiatiques, à barrière, sur panier, volatilité stochastique : dans tous ces cas, il n'existe pas de formule. Il reste la simulation.

Discrétiser une équation stochastique

Discrétisation la plus simple

Pour $dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW$ et un pas Δt :

$$X_{k+1} = X_k + a(X_k, t_k) \Delta t + b(X_k, t_k) \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Où se trouve le calcul stochastique

Dans le $\sqrt{\Delta t}$. Un schéma d'Euler ordinaire écrirait $b \Delta t$; ce serait faire disparaître le hasard, comme au chapitre 1. Et le coefficient est évalué en X_k — le **point gauche** du chapitre 6.

Un ordre de plus

$$X_{k+1} = X_k + a \Delta t + b \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k + \frac{1}{2} b b' \Delta t (\varepsilon_k^2 - 1).$$

Le terme ajouté vient du lemme d'Itô appliqué à b lui-même : c'est encore la correction du second ordre.

Ordres de convergence

Schéma	Convergence forte	Convergence faible
Euler-Maruyama	$\sqrt{\Delta t}$	Δt
Milstein	Δt	Δt

La convergence **forte** mesure l'erreur trajectoire par trajectoire ; la **faible**, l'erreur sur les espérances. Pour un prix d'option, seule la seconde compte : Euler suffit souvent.

Simulation exacte

Puisque la solution est explicite, on n'a **aucune raison de discrétiser** :

$$S_{k+1} = S_k \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k \right].$$

Cette récurrence est exacte pour tout Δt , si grand soit-il.

La leçon générale

Discrétiser une EDS dont on connaît la solution introduit une erreur inutile — et, pour le brownien géométrique, un schéma d'Euler peut même produire des prix négatifs. Résoudre d'abord, simuler ensuite.

Monte Carlo

Évaluer un prix par simulation

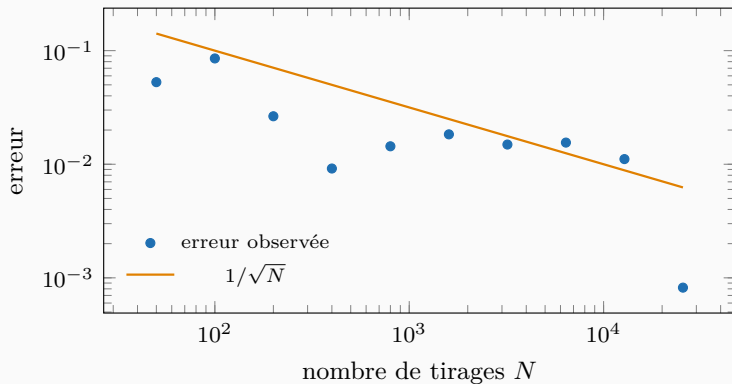
1. Simuler N trajectoires sous $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire avec une dérive r .
2. Calculer le payoff sur chacune.
3. En prendre la moyenne, et actualiser :

$$\widehat{V}_0 = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{payoff}(S_T^{(i)}).$$

Le point à ne jamais oublier

On simule sous $\mathbb{Q}$, avec r , et **non** sous la probabilité historique avec μ . C'est l'erreur la plus fréquente, et elle biaise systématiquement le prix.

$$\text{écart-type de } \widehat{V}_0 = \frac{\text{écart-type du payoff}}{\sqrt{N}}.$$



Ce que coûte la précision

Diviser l'erreur par 10 exige de multiplier N par **100**. C'est la faiblesse structurelle de Monte Carlo — et la raison pour laquelle on réduit la variance plutôt que d'augmenter N .

Variables antithétiques

Pour chaque tirage ε , utiliser également $-\varepsilon$. Les deux trajectoires sont négativement corrélées, ce qui réduit la variance de leur moyenne — à coût de calcul presque inchangé.

Autres techniques usuelles

Variable de contrôle : simuler en parallèle un actif dont le prix exact est connu, et corriger l'écart observé. Échantillonnage préférentiel : concentrer les tirages là où le payoff est non nul — indispensable pour les options très en dehors de la monnaie, et pour les quantiles extrêmes de la VaR.

Les limites, et la suite

Le smile de volatilité

Si Black-Scholes était exact, la volatilité déduite des prix de marché serait la même pour tous les prix d'exercice. Elle ne l'est pas : elle dessine une courbe en sourire, plus élevée aux extrêmes.

Ce que le smile signifie

Le marché paie plus cher les options loin de la monnaie que ne le prévoit la loi log-normale. Autrement dit, il **n'y croit pas** : il attribue aux mouvements extrêmes une probabilité plus forte — exactement les queues épaisses de l'économétrie financière.

Modèle de Heston

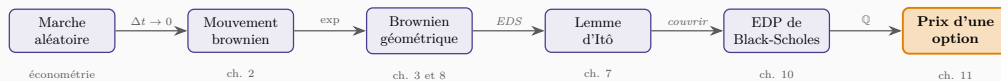
$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sqrt{v_t} dW_t^{(1)}, \quad dv_t = \theta(\bar{v} - v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^{(2)},$$

avec $\text{Corr}(dW^{(1)}, dW^{(2)}) = \rho < 0$.

Trois cours qui se rejoignent

La variance suit un **processus CIR** (chapitre 9). Sa persistance reproduit les **grappes de volatilité** du GARCH (économétrie financière). Le ρ négatif reproduit l'**effet de levier**. Le calcul stochastique fournit le langage; l'économétrie avait fourni les faits.

Le fil conducteur, du début à la fin



Le cours suivant : Value at Risk

- **Chapitre 4** — VaR Monte Carlo : la simulation de ce chapitre, appliquée non plus au prix moyen d'une option mais à un **quantile** de perte.
- **Chapitre 5** — VaR des portefeuilles d'options : les grecques du chapitre 11 servent à approcher la perte par Δ et Γ .
- **Chapitre 6** — Risque de modèle : les limites énoncées ici deviennent l'objet même du chapitre.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 12

- Euler-Maruyama discrétise une EDS avec un pas de bruit en $\sqrt{\Delta t}$; Milstein ajoute la correction d'Itô.
- Le brownien géométrique se simule **exactement** : ne pas discrétiser ce qu'on sait résoudre.
- Monte Carlo se conduit sous $\mathbb{Q}$, avec r et jamais μ ; sa précision est en $1/\sqrt{N}$.
- Le smile de volatilité est le démenti empirique le plus net du modèle.
- Heston réconcilie le calcul stochastique et les faits établis par l'économétrie financière.

Le mot de la fin

Ce cours est parti de la marche aléatoire que vous connaissiez, et a abouti au prix d'une option. Entre les deux, une seule idée neuve : quand le hasard est assez irrégulier, le terme du second ordre ne disparaît plus. Tout le reste en découle.