

Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 9 : Les autres processus de la finance



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Deux extensions indispensables

Choisir son processus

Synthèse

Avant de commencer

Le brownien géométrique ne convient pas à tout

Il décrit une grandeur qui **dérive indéfiniment** : c'est vrai d'un cours d'action, faux d'un taux d'intérêt, d'un spread de crédit ou d'une volatilité. Ces grandeurs reviennent vers une moyenne.

Ce chapitre construit les processus correspondants, et referme le tableau ouvert au chapitre 4.

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Ornstein-Uhlenbeck, ou modèle de Vasicek

$$dX_t = \theta (\bar{x} - X_t) dt + \sigma dW_t, \quad \theta > 0.$$

Sa parenté

La dérive est **exactement** celle de l'équation d'ajustement du chapitre 4. Seul le terme σdW est nouveau. C'est la version stochastique du retour à la moyenne.

La méthode du chapitre 4 s'applique presque sans changement. Posons $f(t, x) = x e^{\theta t}$ et appliquons Itô. Comme $f_{xx} = 0$, le terme de convexité est nul :

$$d(X_t e^{\theta t}) = \theta X_t e^{\theta t} dt + e^{\theta t} dX_t = \theta \bar{x} e^{\theta t} dt + \sigma e^{\theta t} dW_t.$$

En intégrant de 0 à t :

Solution

$$X_t = \bar{x} + (X_0 - \bar{x})e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s.$$

Trois morceaux

Le niveau de long terme $\bar{x}$; l'oubli exponentiel de la condition initiale, à la vitesse θ ; et une moyenne des chocs passés, **pondérée par leur ancienneté**.

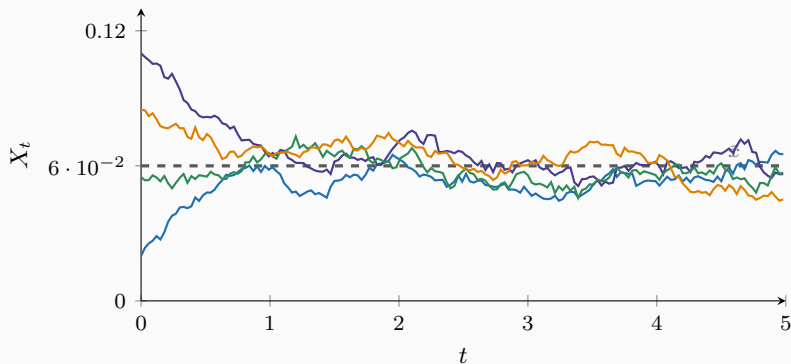
L'intégrale est une somme de termes gaussiens : X_t est donc gaussien, avec

$$\mathbb{E}(X_t) = \bar{x} + (X_0 - \bar{x})e^{-\theta t}, \quad \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t}).$$

La différence essentielle avec le brownien géométrique

Une variance qui ne diverge pas

Quand $t \rightarrow \infty$, $\text{Var}(X_t) \rightarrow \sigma^2/(2\theta)$: le processus admet une **loi stationnaire**. Le brownien, lui, a une variance qui croît sans limite.



	Déterministe	Stochastique
Temps discret, $\rho = 1$	—	marche aléatoire
Temps continu, sans rappel	$\dot{x} = 0$	mouvement brownien
Temps discret, $\rho < 1$	—	AR(1) stationnaire
Temps continu, avec rappel	$\dot{x} = a(\bar{x} - x)$	Ornstein-Uhlenbeck

La correspondance exacte

L'AR(1) $x_{t+1} = c + \rho x_t + e_t$ est la discrétisation d'Ornstein-Uhlenbeck avec $\rho = e^{-\theta \Delta t}$. Le mouvement brownien est celle de la marche aléatoire. Les deux colonnes de votre cours d'économétrie ont désormais leur pendant continu.

Deux extensions indispensables

Cox-Ingersoll-Ross

$$dX_t = \theta(\bar{x} - X_t) dt + \sigma\sqrt{X_t} dW_t.$$

Ce que la racine carrée change

Quand X s'approche de zéro, le terme de diffusion s'annule : seul reste le rappel $\theta\bar{x} dt$, qui est positif. Le processus est **repoussé** du zéro.

Condition de Feller

Si $2\theta\bar{x} \geq \sigma^2$, le processus reste strictement positif. Sinon il peut toucher zéro.

Pourquoi ce modèle domine sur les taux

Vasicek autorise des taux négatifs — longtemps considéré comme un défaut, redevenu réaliste depuis 2015. CIR les interdit, et rend en outre la volatilité plus forte quand les taux sont élevés, ce que les données confirment.

Modèle de Merton à sauts

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu dt + \sigma dW_t + (J - 1) dN_t,$$

où N est un processus de Poisson d'intensité λ et J l'amplitude aléatoire du saut.

Ce que le brownien ne peut pas faire

Un brownien est continu : pour perdre 20 %, il doit passer par -1% , -2% , etc. Or les krachs sont instantanés. Le terme de saut produit ce que la continuité interdit — et il épaissit les queues, comme les données l'exigent.

Choisir son processus

Le tableau de synthèse

Grandeur	Comportement observé	Processus
Cours d'action	croissance, pas de niveau d'ancrage	brownien géométrique
Taux d'intérêt court	retour à la moyenne	Vasicek ou CIR
Spread de crédit	positif, retour à la moyenne	CIR
Volatilité	positive, très persistante	CIR (Heston)
Taux de change	retour lent vers la parité	Ornstein-Uhlenbeck
Actif en période de crise	discontinuités	diffusion avec sauts

La règle de choix

Deux questions suffisent : la grandeur a-t-elle un **niveau d'ancrage** ? doit-elle rester **positive** ? Les réponses désignent le processus.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 9

- Ornstein-Uhlenbeck ajoute un bruit à l'équation d'ajustement; il se résout par **facteur intégrant**, sans terme de convexité puisque la transformation est affine.
- Il possède une loi stationnaire : $\text{Var}(X_\infty) = \sigma^2/2\theta$.
- C'est le pendant continu de l'AR(1) stationnaire, comme le brownien l'est de la marche aléatoire.
- CIR remplace σ par $\sigma\sqrt{X}$ et interdit le franchissement de zéro sous la condition de Feller.
- Les sauts produisent les discontinuités et les queues épaisses que le brownien ne peut pas générer.

Vers la partie IV

Nous savons modéliser le sous-jacent. Reste la question qui a fait la fortune de cette théorie : combien vaut un contrat dont le gain dépend de ce sous-jacent ?