

Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 8 : Le modèle de Black-Scholes-Merton pour une action



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

L'hypothèse fondatrice

La résolution

Estimer les deux paramètres

Confrontation aux données

Synthèse

Avant de commencer

Le chapitre 3 a posé une question : d'où vient le $-\sigma^2/2$? Le chapitre 7 a donné l'outil. Ici, nous répondons.

L'hypothèse fondatrice

Modèle de Black-Scholes-Merton

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad \text{soit} \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Pourquoi cette écriture est la bonne

Ce n'est pas le prix qui obéit à une loi simple, c'est son **rendement**. Une action à 100 dirhams et une action à 10 000 dirhams peuvent partager le même μ et le même σ ; elles ne partageraient jamais la même dérive en dirhams.

C'est la marche aléatoire, en continu

Discrétisée, l'équation donne

$$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} \simeq \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Les rendements sont indépendants et de même loi : le logarithme du prix suit une marche aléatoire. C'est l'hypothèse d'efficience, sous sa forme la plus nette.

La résolution

Posons $f(S) = \ln S$. Alors $f' = 1/S$ et $f'' = -1/S^2$. Le lemme d'Itô, avec $a = \mu S$ et $b = \sigma S$:

$$d(\ln S) = \left(\mu S \cdot \frac{1}{S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \cdot \left(-\frac{1}{S^2} \right) \right) dt + \sigma S \cdot \frac{1}{S} dW$$

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t$$

Le membre de droite ne dépend plus de S : il s'intègre directement.

$$\ln S_t - \ln S_0 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t$$

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]$$

La dette du chapitre 3 est soldée

C'est exactement la formule posée sans justification cinq chapitres plus tôt. Le terme $-\sigma^2/2$ est le **terme de convexité du lemme d'Itô**, appliqué à une fonction concave — le logarithme — d'où son signe négatif.

Pourquoi le rendement moyen n'est pas la dérive du logarithme

Deux nombres, deux questions

μ répond à : de combien le prix croît-il **en moyenne**? Réponse : $E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$.

$\mu - \sigma^2/2$ répond à : de combien croît-il **le plus souvent**? C'est le taux de croissance de la médiane, et celui que réalise presque sûrement une trajectoire sur longue période.

Conséquence de gestion

Deux fonds de même μ mais de volatilités différentes n'offrent pas la même expérience. Celui dont σ est le plus élevé a une performance moyenne identique et une performance **typique** inférieure. C'est le coût de la volatilité, souvent appelé *variance drag*.

Deux placements sur dix ans

$S_0 = 100, \mu = 8\%$.

- $\sigma = 15\%$: moyenne $100 e^{0,8} = 223$; médiane $100 e^{(0,08-0,011)\times 10} = 199$.
- $\sigma = 40\%$: moyenne **223** également; médiane $100 e^{(0,08-0,08)\times 10} = 100$.

Même espérance, et pourtant le second placement a une chance sur deux de n'avoir rien rapporté.

Estimer les deux paramètres

Sur n rendements logarithmiques quotidiens r_i :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{252}{n-1} \sum_i (r_i - \bar{r})^2}.$$

Pourquoi $\sqrt{252}$

La variance s'additionne dans le temps : la variance annuelle vaut 252 fois la variance quotidienne, donc l'écart-type est multiplié par $\sqrt{252}$. C'est la règle de la racine carrée du temps, rencontrée au chapitre 1 – valable **uniquement** sous l'hypothèse d'indépendance des rendements.

$\hat{\mu}$ a un écart-type de $\frac{\sigma}{\sqrt{T}}$, T = durée totale d'observation.

Le fait décourageant

Cet écart-type ne dépend **que** de la durée T , jamais de la fréquence d'échantillonnage. Observer à la minute plutôt qu'au jour n'améliore en rien l'estimation de μ .

L'ordre de grandeur

Avec $\sigma = 20\%$ et vingt ans de données : écart-type de $\hat{\mu}$ égal à $0,20/\sqrt{20} = 4,5\%$. L'intervalle de confiance à 95 % sur un rendement espéré de 8 % couvre donc environ $[-1\%, 17\%]$.

La conséquence, décisive pour la suite

On ne connaîtra jamais μ avec précision. Il serait catastrophique que le prix d'une option en dépende. Le chapitre 10 montrera le miracle : il n'en dépend pas.

Confrontation aux données

Trois hypothèses du modèle, trois démentis

Le modèle suppose	Les données montrent
σ constante	volatilité en grappes (GARCH)
rendements gaussiens	queues épaisses , kurtosis > 3
trajectoires continues	sauts lors des annonces et des krachs

Pourquoi le garder malgré tout

Parce qu'il est le seul à conduire à une **formule fermée**, donc à une intuition transmissible et à un étalon de comparaison. Un modèle faux mais compris vaut mieux qu'un modèle juste et opaque — à condition de savoir précisément où il est faux.

Ce que la suite du cours fera de ces limites

- **Sauts** : le chapitre 9 introduit les processus de Merton.
- **Volatilité non constante** : le chapitre 12 esquisse Heston, version continue du GARCH.
- **Conséquences pratiques** : le cours de *Value at Risk* en fait son chapitre « risque de modèle ».

Synthèse

L'essentiel du chapitre 8

- $dS/S = \mu dt + \sigma dW$: le rendement, non le prix, obéit à une loi simple.
- Itô appliqué à $\ln S$ donne $d(\ln S) = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW$, donc la solution explicite du chapitre 3.
- $E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$ mais médiane $= S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t}$: la volatilité coûte à la performance typique.
- σ s'estime bien ; μ ne s'estime pas, et cela ne s'améliore pas en échantillonnant plus finement.
- Le modèle est démenti sur trois points connus — et reste le point de départ obligé.

Vers le chapitre 9

Une action n'est pas le seul objet de la finance. Un taux d'intérêt ne dérive pas indéfiniment : il revient vers une moyenne. Le chapitre suivant construit les processus correspondants — et referme le tableau ouvert au chapitre 4.