

Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 2 : Le mouvement brownien



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

La définition

La rugosité des trajectoires

Synthèse

Avant de commencer

Le chapitre 1 a produit un objet limite. Nous cessons maintenant de le construire : nous le **définissons**, et nous travaillons avec.

Le changement de point de vue

Le mouvement brownien n'est plus l'aboutissement d'un calcul, c'est une brique. Comme la loi normale : on ne la redémontre pas à chaque usage, on s'en sert.

La définition

Mouvement brownien standard

Un processus $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard si :

1. $W_0 = 0$;
2. ses **accroissements sont indépendants** : pour $s < t < u$, $W_t - W_s$ et $W_u - W_t$ sont indépendants;
3. ses accroissements sont **gaussiens et stationnaires** : $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$;
4. ses **trajectoires sont continues**.

Ce que chaque propriété interdit

- (2) interdit la **mémoire** : le passé ne renseigne pas sur le prochain mouvement.
- (3) interdit les **sauts de loi** : l'aléa est le même à toute date, et sa taille ne dépend que de la durée écoulée.
- (4) interdit les **discontinuités** : pas de krach instantané. C'est la principale faiblesse du modèle, on y reviendra au chapitre 9.

Traduction financière

- (2) est la forme forte de l'**efficience** : aucune stratégie fondée sur l'historique ne procure d'avantage. (3) dit que le risque d'un placement dépend de sa **durée**, pas de sa date.

$$\mathbb{E}(W_t) = 0, \quad \text{Var}(W_t) = t, \quad \text{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t).$$

La covariance, en une ligne

Pour $s < t$, on écrit $W_t = W_s + (W_t - W_s)$. Le second terme est indépendant du premier et centré, donc

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = \text{Var}(W_s) = s = \min(s, t).$$

Propriété de martingale

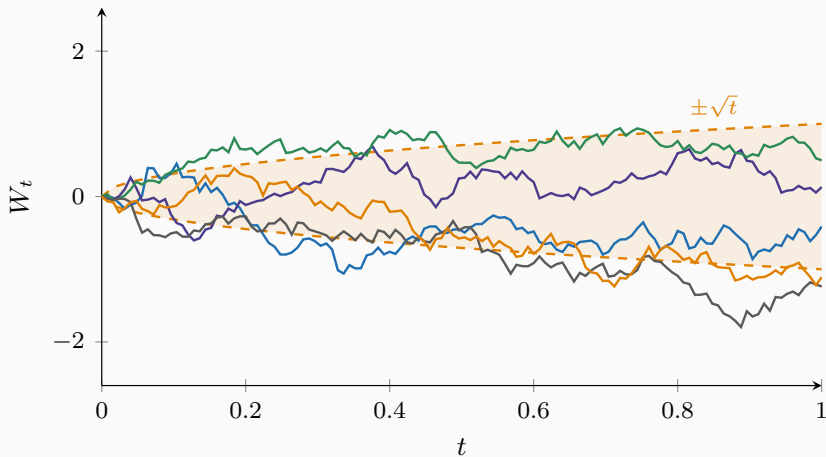
$$\mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_s) = W_s \quad \text{pour } s < t,$$

où $\mathcal{F}_s$ désigne l'information disponible à la date s .

Ce que cela veut dire

La meilleure prévision de demain est la valeur d'aujourd'hui. C'est exactement ce que disait la marche aléatoire $\mathbb{E}(y_{t+1} \mid y_t) = y_t$ — l'écho continu de ce que vous connaissez déjà.

Cinq trajectoires



L'enveloppe $\pm\sqrt{t}$ n'est pas une barrière : c'est l'écart-type.

La rugosité des trajectoires

Non-dérivabilité

Presque sûrement, la trajectoire $t \mapsto W_t$ n'admet de dérivée en **aucun** point.

L'argument tient en une ligne. Sur un intervalle de longueur h , l'accroissement est d'ordre $\sqrt{h}$, donc

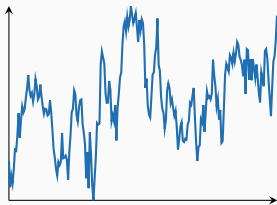
$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \sim \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty.$$

La conséquence pour tout le cours

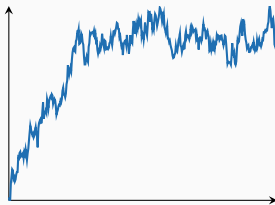
On ne pourra **jamais** écrire dW/dt . Toute la partie II est la recherche d'un calcul différentiel qui s'en passe.

Le zoom qui ne lisse rien

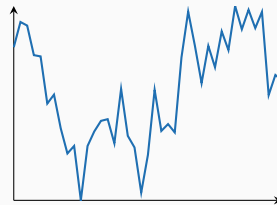
intervalle de longueur 1



longueur 1/10



longueur 1/100



Chaque vignette est un zoom de la précédente, remis à l'échelle $\sqrt{\cdot}$. Une courbe dérivable finirait par ressembler à une droite. Celle-ci ne se calme jamais.

Le fait central du cours

Pour une subdivision de $[0, t]$ de pas tendant vers zéro,

$$\sum_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \longrightarrow t.$$

On note $\langle W \rangle_t = t$, et l'on résume par la règle formelle $(dW)^2 = dt$.

Pourquoi c'est stupéfiant

La somme des carrés des accroissements est **aléatoire terme à terme**, et pourtant sa limite est **déterministe**. Chaque carré vaut en moyenne Δt ; il y en a $t/\Delta t$; le total vaut t et ne fluctue plus.

Pour une fonction dérivable f , la même somme tendrait vers **zéro** : les accroissements sont d'ordre h , leurs carrés d'ordre h^2 , et il n'y en a que t/h .

La conséquence, et tout le cours en dépend

Dans un développement de Taylor, le terme du **second ordre** ne disparaît pas. C'est précisément lui qui produira le lemme d'Itô au chapitre 7, et le fameux $-\sigma^2/2$ du chapitre 8.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 2

- Quatre propriétés définissent le brownien : départ en zéro, accroissements indépendants, gaussiens de variance égale à la durée, trajectoires continues.
- $E(W_t) = 0$, $\text{Var}(W_t) = t$, $\text{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t)$; c'est une martingale.
- Les trajectoires sont continues mais **nulle part dérivables** : dW/dt n'existe pas.
- La variation quadratique vaut t : formellement $(dW)^2 = dt$.

Vers le chapitre 3

Nous avons un processus. Est-il un bon modèle de prix? Le chapitre suivant montre qu'en l'état, non — et construit celui qui convient.