

Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 3 : Modéliser un prix, première tentative



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

L'échec du brownien arithmétique

Le mouvement brownien géométrique

Synthèse

Avant de commencer

Un processus (S_t) qui puisse représenter le cours d'une action. Avant d'en proposer un, écrivons ce qu'il doit respecter.

Trois exigences non négociables

1. **Positivité** : un prix ne peut pas devenir négatif.
2. **Invariance d'échelle** : la variation de 10 dirhams n'a pas le même sens sur une action à 100 dirhams et sur une action à 10 000. Ce sont les variations **relatives** qui doivent être modélisées.
3. **Accumulation du risque** : l'incertitude doit croître avec l'horizon.

L'échec du brownien arithmétique

Mouvement brownien avec dérive

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t.$$

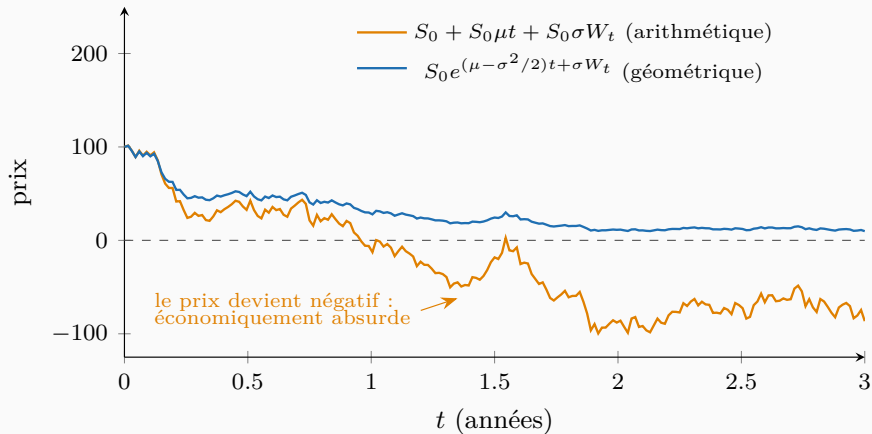
Une tendance linéaire, plus un bruit brownien.

Il satisfait l'exigence 3, et il est parfaitement maniable : X_t suit une loi normale de moyenne $X_0 + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$.

Mais une loi normale n'est jamais bornée

Une gaussienne charge toute la droite réelle. La probabilité que X_t devienne négatif est strictement positive — et elle augmente avec t .

Ce que cela donne



Même aléa, deux modèles. L'un franchit zéro, l'autre non.

La faute n'est pas dans le hasard, elle est dans l'objet modélisé

Le brownien arithmétique fait porter le bruit sur le **niveau** du prix : σ y est un montant en dirhams. Il faut le faire porter sur le **rendement** : σ doit être un pourcentage.

Le mouvement brownien géométrique

Rendement logarithmique

$$r_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right).$$

Pour de petites variations, $r_t \simeq (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$: c'est bien un rendement.

Les deux vertus du logarithme

Il **additionne** les rendements sur plusieurs périodes, ce qui appelle une marche aléatoire. Et il transforme la contrainte $S_t > 0$ en une absence de contrainte sur $\ln S_t$.

Posons donc que le logarithme du prix est un brownien avec dérive :

$$\ln S_t = \ln S_0 + \nu t + \sigma W_t.$$

En prenant l'exponentielle :

Mouvement brownien géométrique

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right].$$

μ est le **rendement espéré** annuel, σ la **volatilité** annuelle.

Le prix est positif par construction, et les rendements sont indépendants d'une période à l'autre.

Nous avons écrit $\nu = \mu - \sigma^2/2$ sans le justifier. C'est le point aveugle de ce chapitre.

La dette que le cours contracte ici

Pourquoi $\mu - \sigma^2/2$ et non μ ? Aucune manipulation élémentaire ne le produit. Ce terme naîtra du **lemme d'Itô**, au chapitre 7, et sera pleinement justifié au chapitre 8. Retenez la question : elle organise les cinq chapitres qui viennent.

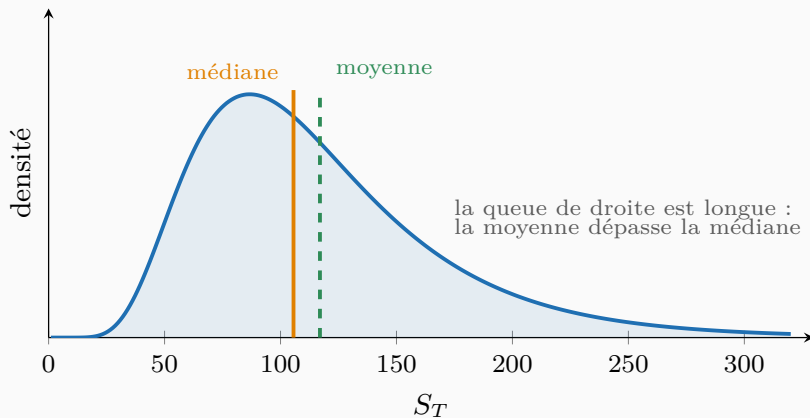
Loi du prix futur

$\ln S_t$ est gaussien, donc S_t suit une loi **log-normale** :

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu t}, \quad \text{médiane}(S_t) = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t}.$$

C'est le rôle du terme correcteur : il fait en sorte que l'espérance vaille exactement $S_0 e^{\mu t}$, ce qu'on attend d'un rendement espéré μ .

Moyenne et médiane ne coïncident pas



Pourquoi cet écart compte en gestion

La performance **moyenne** d'un portefeuille dépasse la performance **médiane** : la moyenne est tirée par quelques trajectoires très favorables. Un investisseur typique obtient la médiane, pas la moyenne. Plus la volatilité est forte, plus l'écart se creuse.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 3

- Un modèle de prix doit garantir la positivité et porter sur les variations **relatives**.
- Le brownien arithmétique échoue : il rend des prix négatifs possibles.
- Le mouvement brownien **géométrique** modélise $\ln S_t$ par un brownien avec dérive.
- S_t suit une loi log-normale, d'espérance $S_0 e^{\mu t}$ et de médiane $S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t}$.
- Le terme $-\sigma^2/2$ reste **inexpliqué** : c'est la question ouverte du cours.

Vers la partie II

Nous avons écrit le prix sous forme **explicite**. Le langage naturel de la finance est pourtant celui des **variations** : dS en fonction de S . Pour l'écrire, il faut d'abord savoir ce qu'est une équation différentielle — et pourquoi celles que nous connaissons ne suffiront pas.