

Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 7 : Le lemme d'Itô



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

L'énoncé

La démonstration

Compléments

Synthèse

Avant de commencer

Si X obéit à une EDS, quelle équation obéit une fonction de X ?

Pourquoi c'est la question centrale

Le prix d'une option est une **fonction** du prix de l'action. Un rendement logarithmique est une **fonction** du prix. Savoir transporter une EDS à travers une fonction, c'est tenir tout le reste du cours.

L'énoncé

Table d'Itô

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dW = 0, \quad dW \cdot dW = dt.$$

Les deux premières lignes sont classiques : ce sont des infiniment petits d'ordre supérieur. La troisième est la variation quadratique du chapitre 2, et c'est elle qui fait toute la différence.

Lemme d'Itô

Soit $dX_t = a dt + b dW_t$ et $f(t, x)$ deux fois continûment dérivable. Alors

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial f}{\partial x} dW_t.$$

Comment le lire

C'est la formule de dérivation composée, augmentée d'un seul terme : $\frac{1}{2} b^2 f_{xx}$. Tout le calcul stochastique tient dans ce terme.

La démonstration

C'est la seule démonstration du cours, parce qu'elle explique tout le reste.

$$df = f_t dt + f_x dX + \frac{1}{2} f_{xx} (dX)^2 + \underbrace{f_{tx} dt dX + \frac{1}{2} f_{tt} (dt)^2 + \dots}_{\text{négligeables}}$$

En calcul classique, on s'arrête au premier ordre : $(dx)^2$ est d'ordre $(dt)^2$. Ici, il faut aller voir.

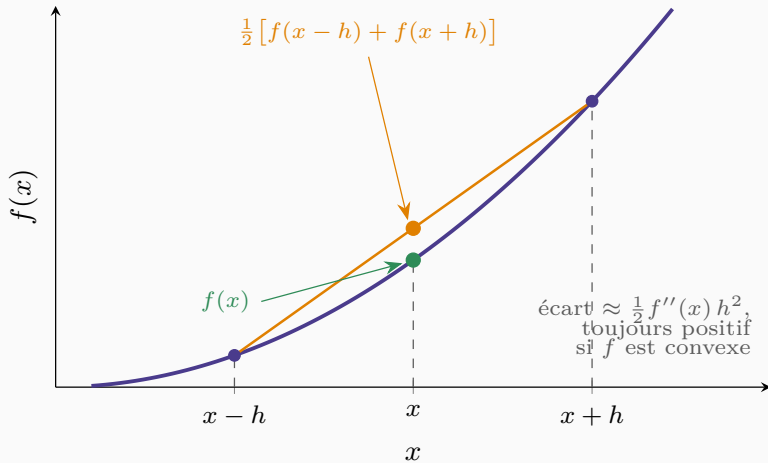
$$(dX)^2 = (a dt + b dW)^2 = a^2 \underbrace{(dt)^2}_0 + 2ab \underbrace{dt dW}_0 + b^2 \underbrace{(dW)^2}_{dt} = b^2 dt.$$

En reportant :

$$df = f_t dt + f_x (a dt + b dW) + \frac{1}{2} f_{xx} b^2 dt,$$

et en regroupant selon dt et dW , on obtient le lemme.

Pourquoi ce terme est positif quand f est convexe



L'inégalité de Jensen, vue localement

Faire subir à x un choc symétrique et lui appliquer une fonction **convexe** ne laisse pas la moyenne inchangée : elle augmente. Le terme $\frac{1}{2}f''b^2$ mesure exactement ce gain de convexité, par unité de temps.

Sur le brownien lui-même ($a = 0, b = 1$)

- $f(x) = x^2 : f_x = 2x, f_{xx} = 2$, donc $d(W^2) = dt + 2W dW$. En intégrant, on retrouve exactement le résultat du chapitre 6.
- $f(x) = e^x : d(e^W) = \frac{1}{2}e^W dt + e^W dW$. La dérive apparaît alors qu'il n'y en avait aucune.
- $f(x) = \ln x$ appliqué à $dX = aX dt + bX dW : f_x = 1/x, f_{xx} = -1/x^2$, donc

$$d(\ln X) = (a - \frac{1}{2}b^2)dt + b dW.$$

Le $-\sigma^2/2$ vient d'apparaître

Avec $a = \mu$ et $b = \sigma$, ce dernier calcul donne

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW.$$

C'est le terme laissé en suspens au chapitre 3. Le chapitre 8 en tire la solution complète.

Compléments

Deux sources de hasard

Si $dX_i = a_i dt + b_i dW^{(i)}$ avec $\text{Corr}(dW^{(1)}, dW^{(2)}) = \rho dt$, alors pour $f(t, x_1, x_2)$:

$$df = \left(f_t + \sum_i a_i f_{x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_i b_j \rho_{ij} f_{x_i x_j} \right) dt + \sum_i b_i f_{x_i} dW^{(i)}.$$

À quoi cela sert

Options sur panier, produits de change, portefeuilles multi-actifs : dès qu'il y a deux sources de risque, c'est cette version qui s'applique. Le terme croisé $\rho f_{x_1 x_2}$ est la trace de la dépendance étudiée en économétrie financière.

Trois erreurs fréquentes

- Ce n'est pas une approximation : c'est une **égalité** exacte, au sens des intégrales.
- Le terme correcteur ne disparaît pas quand σ est petit : il est d'ordre σ^2 , pas d'ordre supérieur en dt .
- Il s'annule si f est **affine** ($f_{xx} = 0$) : le calcul classique reste valable pour les fonctions linéaires. Un portefeuille sans option obéit donc aux règles usuelles.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 7

- Table d'Itô : $(dt)^2 = 0$, $dt dW = 0$, $(dW)^2 = dt$.
- Lemme d'Itô : $df = (f_t + af_x + \frac{1}{2}b^2 f_{xx})dt + bf_x dW$.
- Il se démontre par Taylor à l'ordre 2; le terme du second ordre survit à cause de la variation quadratique.
- $\frac{1}{2}b^2 f_{xx}$ est un **terme de convexité** : positif si f est convexe.
- Appliqué à $\ln S$, il fait apparaître $\mu - \sigma^2/2$.

Vers le chapitre 8

Nous avons l'outil. Il reste à écrire l'EDS du prix d'une action, à la résoudre, et à confronter le résultat aux données — y compris à ce que l'économétrie financière a montré.