

Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 6 : L'intégrale stochastique d'Itô



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Pourquoi l'intégrale usuelle échoue

La construction

L'exemple qui doit surprendre

Synthèse

Avant de commencer

Le chapitre 5 a écrit $dX = a dt + b dW$ en précisant que cette écriture n'a de sens que par sa forme intégrale. Il reste à définir

$$\int_0^t b(X_s, s) dW_s.$$

Pourquoi l'intégrale usuelle échoue

Variation totale d'une fonction

$$V(g) = \sup \sum_k |g(t_{k+1}) - g(t_k)|.$$

L'intégrale de Riemann-Stieltjes $\int f dg$ est définie dès que $V(g)$ est **finie**.

Le brownien n'y satisfait pas

Sur n intervalles, chaque accroissement est d'ordre $\sqrt{1/n}$, et il y en a n : la somme est d'ordre $n \cdot n^{-1/2} = \sqrt{n} \rightarrow \infty$. La variation totale du brownien est **infinie**.

La variation **quadratique**, elle, est finie et vaut t (chapitre 2). C'est sur elle que reposera toute la construction.

Le programme

Puisque l'intégrale ne peut pas être définie trajectoire par trajectoire, on la définit **en moyenne quadratique** : comme limite dans L^2 de sommes discrètes.

La construction

On commence par les intégrandes les plus simples : ceux qui sont constants sur chaque intervalle d'une subdivision.

Intégrale d'un processus étagé

Si b vaut b_k sur $[t_k, t_{k+1}]$, on pose

$$\int_0^t b_s dW_s = \sum_k b_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

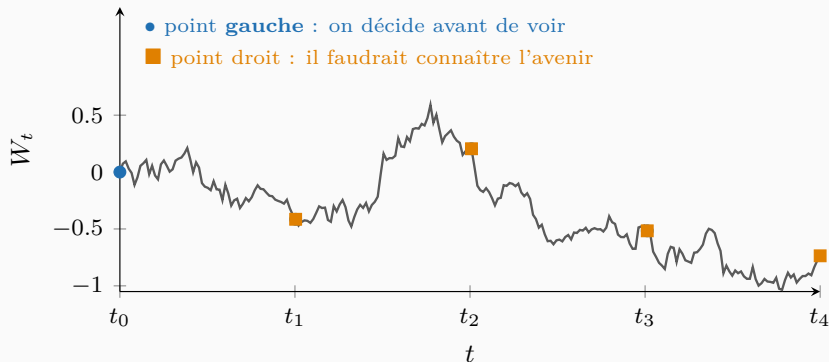
On étend ensuite par passage à la limite aux intégrandes généraux, en approchant b par des processus étagés.

Une somme de Riemann laisse libre le point où l'on évalue l'intégrande dans chaque intervalle. Pour une fonction régulière, ce choix est sans conséquence. Ici, il en a une.

Convention d'Itô

On évalue toujours l'intégrande au **point gauche** : b_{t_k} , et jamais $b_{t_{k+1}}$ ni b au milieu.

Ce que ce choix veut dire



Une convention qui est un principe économique

b_{t_k} est la position détenue **au début** de l'intervalle : elle est décidée avant d'observer le mouvement du marché. Le point droit reviendrait à choisir sa position en connaissant déjà la variation à venir. La convention d'Itô est l'interdiction de la clairvoyance — c'est ce qui la rend seule admissible en finance.

Trois résultats essentiels

Sous des conditions d'intégrabilité usuelles :

1. **Espérance nulle** : $E\left[\int_0^t b_s dW_s\right] = 0$.
2. **Isométrie d'Itô** : $E\left[\left(\int_0^t b_s dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t b_s^2 ds\right]$.
3. L'intégrale, vue comme processus en t , est une **martingale**.

Lecture

- (1) et (3) découlent du point gauche : b_{t_k} est connu quand $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ survient, et cet accroissement est centré et indépendant. (2) transforme un calcul de variance stochastique en une intégrale ordinaire — c'est l'outil de travail.

L'autre convention

En évaluant l'intégrande au **milieu** de chaque intervalle, on obtient l'intégrale de Stratonovich, notée $\int b \circ dW$. Elle obéit aux règles du calcul classique — mais elle n'est plus une martingale, et elle anticipe.

Pourquoi la finance choisit Itô

La physique préfère souvent Stratonovich, dont les règles sont plus commodes. La finance ne le peut pas : un modèle où l'on décide en connaissant l'avenir autorise des profits sans risque. On accepte donc un calcul plus lourd, contre un modèle honnête.

L'exemple qui doit surprendre

Le calcul classique donnerait $\frac{1}{2}W_t^2$. Vérifions. Partons de l'identité algébrique

$$W_{k+1}^2 - W_k^2 = 2 W_k (W_{k+1} - W_k) + (W_{k+1} - W_k)^2.$$

En sommant sur toute la subdivision :

$$W_t^2 = 2 \sum_k W_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \sum_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2.$$

La première somme tend vers $2 \int_0^t W_s dW_s$. La seconde est la **variation quadratique** : elle tend vers t .
D'où :

Résultat

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Ce qu'il faut en conclure

Le terme $-t/2$ n'a **aucun équivalent** en calcul classique. Il ne vient pas d'une erreur : il vient de ce que la somme des carrés ne s'annule pas. Ce terme est le premier lemme d'Itô rencontré. Le chapitre 7 le généralise.

Puisque $E[\int W dW] = 0$, la formule impose $E(W_t^2) = t$ — ce qui est exact.

Le contrôle qui rassure

Si l'on avait gardé la formule classique $\frac{1}{2}W_t^2$, son espérance vaudrait $t/2 \neq 0$: l'intégrale stochastique ne serait plus centrée, et perdrait sa propriété de martingale. Le terme correcteur n'est pas facultatif.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 6

- L'intégrale de Riemann-Stieltjes est inutilisable : la variation totale du brownien est infinie.
- L'intégrale d'Itô se construit dans L^2 , à partir des processus étagés.
- L'intégrande est évalué au **point gauche** : on décide avant d'observer.
- Elle est centrée, c'est une martingale, et l'**isométrie d'Itô** donne sa variance.
- $\int_0^t W dW = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$: le terme $-t/2$ annonce le lemme d'Itô.

Vers la partie III

Nous savons intégrer. Il reste à savoir **dériver** — c'est-à-dire à trouver comment se comporte $f(X_t)$ quand X obéit à une EDS. C'est le lemme d'Itô, et il ouvre immédiatement la voie au prix d'une action.