

# Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 11 : Probabilité risque-neutre et  
formule de Black-Scholes



---

Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Le changement de probabilité

La formule

Les grecques

Synthèse

Avant de commencer

---

Le prix d'une option ne dépend pas de  $\mu$ . Nous allons exploiter ce fait de la façon la plus radicale : puisque la réponse est la même quel que soit  $\mu$ , **choisissons le  $\mu$  qui rend le calcul facile.**

## Le changement de probabilité

---

## Probabilité risque-neutre

La probabilité  $\mathbb{Q}$  sous laquelle **tout actif** — l'action comme l'option — a pour rendement espéré le taux sans risque  $r$  :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

## Ce que $\mathbb{Q}$ n'est pas

Ce n'est **pas** une croyance sur le monde, et personne ne pense que les actions rapportent le taux sans risque. C'est un instrument de calcul, légitimé par le fait que le prix cherché ne dépend pas de  $\mu$ .

## Théorème de Girsanov (énoncé)

Changer la dérive d'un mouvement brownien revient à changer de probabilité, sans modifier l'ensemble des trajectoires possibles. En posant

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t,$$

le processus  $W^{\mathbb{Q}}$  est un mouvement brownien standard sous  $\mathbb{Q}$ .

## La quantité qui apparaît

$(\mu - r)/\sigma$  est le **ratio de Sharpe** de l'action : la prime de risque par unité de volatilité. Passer de  $\mathbb{P}$  à  $\mathbb{Q}$ , c'est exactement retirer la prime de risque.

## Évaluation risque-neutre

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\text{payoff}(S_T)].$$

## Pourquoi l'actualisation au taux sans risque est ici légitime

Sous  $\mathbb{Q}$ , plus aucun actif ne porte de prime de risque : tous rapportent  $r$ . L'objection du chapitre 10 tombe. La difficulté a été déplacée du choix d'un taux d'actualisation vers un changement de mesure.

## La formule

---

Sous  $\mathbb{Q}$ , le chapitre 8 donne

$$S_T = S_0 \exp \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}} \right],$$

donc  $\ln S_T$  est gaussien de moyenne  $\ln S_0 + (r - \sigma^2/2)T$  et de variance  $\sigma^2 T$ . Il reste à calculer une espérance sur une log-normale tronquée en  $K$ .

## Formule de Black-Scholes

$$C_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$
$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

$N$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

### Deux termes, deux rôles

$Ke^{-rT}N(d_2)$  est la valeur actualisée du prix d'exercice, pondérée par  $N(d_2)$  – la **probabilité risque-neutre d'exercer**.

$S_0N(d_1)$  est la valeur de l'action reçue en cas d'exercice, et  $N(d_1)$  est aussi la quantité d'actions à détenir pour couvrir : c'est le  $\Delta$  du chapitre 10.

### Parité call-put

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}.$$

Cette relation ne suppose **aucun** modèle : elle découle du seul arbitrage. Elle donne le put dès qu'on a le call.

### Sensibilités, lues directement

- $C_0$  croît avec  $S_0$  : le call est un droit d'acheter.
- $C_0$  croît avec  $\sigma$  : la volatilité ne coûte rien au détenteur — il ne subit pas les baisses — et lui offre les hausses.
- $C_0$  croît avec  $T$  et avec  $r$  : plus le paiement de  $K$  est repoussé, moins il pèse.

## Les grecques

---

## Définitions

| Grecque        | Dérivée                        | Ce qu'elle mesure           |
|----------------|--------------------------------|-----------------------------|
| Delta $\Delta$ | $\partial V / \partial S$      | sensibilité au prix         |
| Gamma $\Gamma$ | $\partial^2 V / \partial S^2$  | instabilité du delta        |
| Vega           | $\partial V / \partial \sigma$ | sensibilité à la volatilité |
| Theta          | $\partial V / \partial t$      | érosion par le temps        |
| Rho            | $\partial V / \partial r$      | sensibilité au taux         |

Pour un call :  $\Delta = N(d_1) \in ]0, 1[$ , et  $\Gamma > 0$ .

Réécrivons l'EDP du chapitre 10 pour un portefeuille couvert ( $\Delta$ -neutre) :

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rV.$$

### La lecture la plus utile du cours

Le détenteur d'une option a  $\Gamma > 0$  : chaque mouvement du sous-jacent, à la hausse comme à la baisse, lui profite lorsqu'il rééquilibre sa couverture. Il paie ce privilège par un  $\Theta < 0$  : la valeur temps s'érode chaque jour. **Le gamma est ce qu'on achète, le theta est son loyer.**

### Trois raisons pour lesquelles elle est imparfaite

- Le rééquilibrage est **discret**, non continu : entre deux ajustements, le gamma laisse passer une erreur.
- Chaque ajustement supporte des **coûts de transaction**, qui croissent quand on couvre plus souvent.
- $\sigma$  est **supposée connue et constante** — l'économétrie financière a montré qu'elle ne l'est pas.

C'est le point de départ du chapitre « risque de modèle » du cours de Value at Risk.

## Synthèse

---

## L'essentiel du chapitre 11

- Sous  $\mathbb{Q}$ , tout actif rapporte  $r$ ; Girsanov autorise ce changement de dérive.
- $(\mu - r)/\sigma$ , le ratio de Sharpe, est exactement ce que le changement de mesure retire.
- $V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\text{payoff}]$ , d'où  $C_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$ .
- $N(d_2)$  est la probabilité risque-neutre d'exercice;  $N(d_1)$  est le delta de couverture.
- $\Theta + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma = rV$  : le gamma s'achète, le theta le paie.

## Vers le chapitre 12

La formule fermée n'existe que pour les options les plus simples. Dès qu'on sort de ce cadre, il faut **simuler** — et c'est cette technique que le cours de Value at Risk reprendra directement.