

Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 4 : Modèles dynamiques et équations différentielles



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Ce qu'est une équation différentielle

Première méthode : la séparation des variables

Seconde méthode : le facteur intégrant

Le pont avec l'économétrie

Synthèse

Avant de commencer

Avertissement

Les équations différentielles ne figurent dans aucun cours antérieur de votre cursus. Ce chapitre les construit à partir de trois choses seulement : la **dérivée**, la **primitive** et l'**exponentielle**.

Il se limite strictement à ce dont les chapitres 8 et 9 auront besoin : les équations du premier ordre, et deux méthodes de résolution.

Ce qu'est une équation différentielle

Équation différentielle du premier ordre

Une équation dont l'inconnue est une **fonction** $x(t)$, et qui relie cette fonction à sa dérivée :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad \text{avec } \dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

La différence avec une équation ordinaire

$3x + 2 = 8$ demande **un nombre**. Une équation différentielle demande **une trajectoire** : non pas où l'on est, mais comment on se déplace à chaque instant.

Ce que l'économiste y met

La théorie économique dit rarement quel sera le niveau du capital dans dix ans. Elle dit comment il **varie** : l'investissement moins la dépréciation. C'est une loi de mouvement — donc une équation différentielle.

Une équation différentielle a une infinité de solutions. Il faut une **condition initiale** $x(0) = x_0$ pour en isoler une.

Première méthode : la séparation des variables

L'équation de la croissance exponentielle

Le cas fondamental

$$\dot{x} = a x, \quad x(0) = x_0.$$

La variation est proportionnelle au niveau atteint.

Séparons ce qui dépend de x et ce qui dépend de t :

$$\frac{dx}{x} = a dt \implies \int \frac{dx}{x} = \int a dt \implies \ln x = a t + c.$$

En prenant l'exponentielle et en fixant c par la condition initiale :

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

Trois régimes

$a > 0$: croissance sans limite. $a < 0$: décroissance vers zéro. $a = 0$: immobilité. Le signe de a décide de tout, son ampleur ne fait que régler la vitesse.

Application

Un capital placé au taux continu a vaut $x_0 e^{at}$ après t années. C'est la capitalisation continue — celle que la finance emploie, parce qu'elle seule est stable par changement de périodicité.

Seconde méthode : le facteur intégrant

Retour vers une cible

$$\dot{x} = a (\bar{x} - x), \quad a > 0.$$

La variable est rappelée vers un niveau de long terme $\bar{x}$, d'autant plus vite qu'elle en est loin.

La séparation des variables fonctionnerait ici, mais apprenons la méthode qui servira au chapitre 9. On réécrit :

$$\dot{x} + a x = a \bar{x}.$$

Le principe

On multiplie les deux membres par e^{at} , choisi pour que le membre de gauche devienne une dérivée de produit :

$$e^{at}\dot{x} + a e^{at}x = \frac{d}{dt}(e^{at}x) = a \bar{x} e^{at}.$$

Il ne reste qu'à intégrer :

$$e^{at}x(t) = \bar{x} e^{at} + c \implies \boxed{x(t) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x}) e^{-at}}$$

Le mécanisme, en un mot

Le facteur intégrant est le multiplicateur qui transforme une somme en une dérivée de produit. C'est le seul choix qui rende l'équation directement intégrable.

L'écart à la cible, $x(t) - \bar{x}$, décroît exponentiellement au taux a . La **demi-vie** de l'ajustement vaut $\ln 2/a$.

Applications

Ajustement partiel des prix vers leur niveau d'équilibre; convergence du capital vers son sentier de long terme dans le modèle de Solow; retour d'un taux d'intérêt vers sa moyenne historique.

Le pont avec l'économétrie

L'AR(1) est une équation d'ajustement discrétisée

Reprenons $\dot{x} = a(\bar{x} - x)$ sur un petit intervalle Δt :

$$x_{t+\Delta t} \simeq x_t + a(\bar{x} - x_t) \Delta t = \underbrace{a\bar{x}\Delta t}_{\text{constante}} + \underbrace{(1 - a\Delta t)}_{\rho} x_t.$$

La correspondance

C'est exactement un AR(1) $x_{t+1} = c + \rho x_t$, avec $\rho = 1 - a\Delta t$.

Le tableau qui relie les deux cours

Temps discret (économétrie)	Temps continu (ce cours)
$x_{t+1} = c + \rho x_t$	$\dot{x} = a(\bar{x} - x)$
$\rho < 1$: stationnaire	$a > 0$: retour à la moyenne
$\rho = 1$: marche aléatoire	$a = 0$: pas de rappel
Vitesse : ρ^k	Vitesse : e^{-at}

Ce que le tableau annonce

La colonne de gauche a un pendant **stochastique** que vous connaissez : l'AR(1) bruité. La colonne de droite n'en a pas encore. Le chapitre 5 le construit, et le chapitre 9 refermera ce tableau.

Le défaut rédhibitoire

La solution d'une équation différentielle est **une seule courbe**, entièrement déterminée par x_0 .
Connaissant aujourd'hui, on connaît tout l'avenir. Aucun prix d'actif ne se comporte ainsi.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 4

- Une équation différentielle décrit une **loi de mouvement**; une condition initiale sélectionne une trajectoire.
- $\dot{x} = ax$ se résout par **séparation des variables** : $x_t = x_0 e^{at}$.
- $\dot{x} = a(\bar{x} - x)$ se résout par **facteur intégrant** : $x_t = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-at}$.
- L'AR(1) de l'économétrie est la version discrétisée de l'équation d'ajustement.
- Ces modèles sont **déterministes** : c'est leur limite.

Vers le chapitre 5

Il faut donc introduire le hasard dans une équation différentielle. La tentation est d'ajouter un terme de bruit à $\dot{x}$. Le chapitre suivant montre pourquoi c'est impossible — et ce qu'on écrit à la place.