

Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 10 : Couverture et équation de Black-Scholes



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

L'objet à évaluer

La couverture

L'absence d'arbitrage

Synthèse

Avant de commencer

Une action vaut S_t aujourd'hui. Un contrat promet un versement qui dépendra de S_T à une date future. Combien vaut ce contrat aujourd'hui ?

L'objet à évaluer

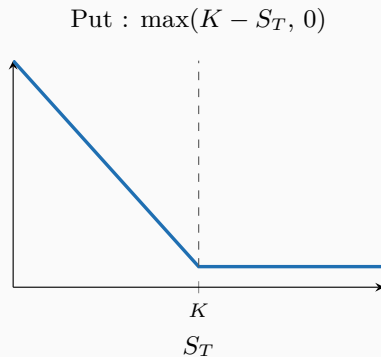
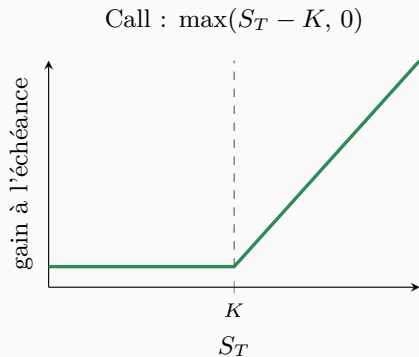
Option d'achat (call) et option de vente (put)

Un **call** de prix d'exercice K et d'échéance T donne le **droit**, non l'obligation, d'acheter l'action au prix K à la date T . Son gain à l'échéance vaut

$$\max(S_T - K, 0).$$

Un **put** donne le droit de vendre, et rapporte $\max(K - S_T, 0)$.

Les deux payoffs



La difficulté, en une phrase

Le gain est une fonction **non linéaire** du prix final : coudée en K . Cette convexité est précisément ce que le lemme d'Itô sait traiter — et ce que l'intuition ne sait pas traiter seule.

Pourquoi l'espérance actualisée ne suffit pas

La réponse naïve

$$V_0 \stackrel{?}{=} e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)].$$

Deux objections

D'abord, cette formule dépendrait de μ — que le chapitre 8 a montré inestimable. Ensuite, elle ignore que l'option est **risquée** : pourquoi l'actualiser au taux sans risque ? Il faudrait une prime de risque, et personne ne sait laquelle.

L'argument de couverture va contourner ces deux objections d'un coup.

La couverture

Notons $V(t, S)$ la valeur inconnue de l'option. Constituons le portefeuille

$$\Pi_t = V(t, S_t) - \Delta S_t,$$

soit une option détenue et Δ actions vendues.

L'idée

Option et action montent ensemble. En vendant la bonne quantité d'actions, on peut annuler exactement la sensibilité du portefeuille au mouvement du marché.

Avec $dS = \mu S dt + \sigma S dW$, le lemme donne

$$dV = \left(V_t + \mu S V_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} \right) dt + \sigma S V_S dW.$$

D'où la variation du portefeuille :

$$d\Pi = dV - \Delta dS = \left(V_t + \mu S V_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} - \Delta \mu S \right) dt + \sigma S (V_S - \Delta) dW.$$

Couverture en delta

En posant

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

le coefficient de dW s'annule identiquement.

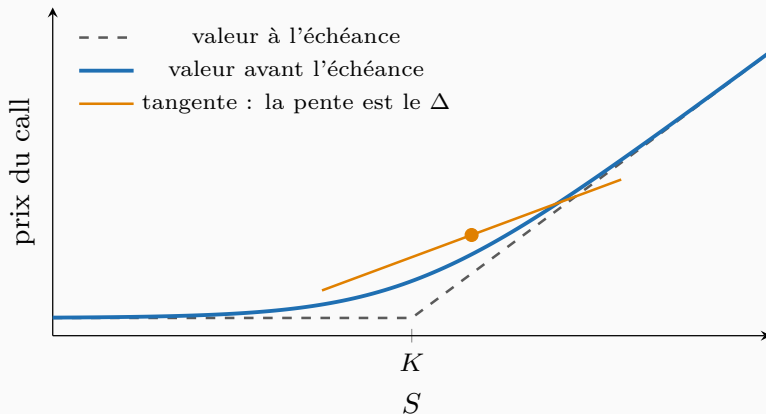
Il reste

$$d\Pi = \left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} \right) dt.$$

Ce qui vient de se produire

Les termes en μ se sont éliminés **avec** le terme en dW . Le portefeuille couvert ne dépend plus du rendement espéré de l'action. C'est le cœur de toute la théorie.

Le delta, géométriquement



Une couverture locale et instantanée

Δ est la pente de la tangente. Comme la courbe est convexe, cette pente **change** : la couverture doit être ajustée en permanence. C'est ce qu'on appelle la couverture dynamique.

L'absence d'arbitrage

Principe

Un portefeuille sans risque doit rapporter le taux sans risque r ; sinon, on emprunterait pour l'acheter — ou on le vendrait pour placer au taux r — et l'on réaliserait un profit certain sans mise de fonds.

$$d\Pi = r \Pi dt = r(V - S V_S)dt.$$

En identifiant les deux expressions de $d\Pi$:

Équation de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r V,$$

avec la condition terminale $V(T, S) = \max(S - K, 0)$ pour un call.

Le fait le plus déroutant du cours

Le rendement espéré de l'action **n'apparaît pas**. Deux investisseurs qui divergent totalement sur l'avenir de l'entreprise s'accordent pourtant sur le prix de l'option.

Pourquoi c'est logique, après coup

L'option n'est pas évaluée comme un pari sur S_T , mais comme le **coût de sa réplication**. Or répliquer consiste à acheter et vendre l'action au prix du marché, quel que soit son rendement futur. Ce qui compte n'est pas où va le prix, mais **de combien il bouge** : σ , et σ seul.

La conséquence pratique

Le paramètre inestimable a disparu ; le paramètre estimable est le seul qui reste. Sans cette propriété, aucun marché d'options ne serait possible.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 10

- Un call rapporte $\max(S_T - K, 0)$: un gain **convexe** en le prix final.
- Le portefeuille $\Pi = V - \Delta S$ devient localement sans risque pour $\Delta = \partial V / \partial S$.
- L'absence d'arbitrage impose $d\Pi = r\Pi dt$, d'où l'EDP de Black-Scholes.
- μ a disparu : le prix d'une option est un **coût de réplication**, pas une espérance de gain.
- La couverture est **dynamique** : Δ change quand S et t changent.

Vers le chapitre 11

Nous avons une équation. Il reste à la résoudre — et le chemin le plus éclairant ne passe pas par l'analyse des EDP, mais par un changement de probabilité.