

Calcul stochastique pour la finance

Chapitre 5 : De l'équation différentielle à l'équation différentielle stochastique



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

La voie fermée

L'écriture différentielle

Le tableau de correspondance

Ce que le hasard change au calcul

Synthèse

Avant de commencer

Nous voulons écrire l'équivalent stochastique de $\dot{x} = a x$. Trois étapes : constater que la voie naturelle est fermée, trouver l'écriture qui la contourne, et mesurer ce que le hasard change au calcul.

La voie fermée

On voudrait écrire :

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b x(t) \xi(t),$$

où $\xi(t)$ serait un « bruit blanc en temps continu ».

Pourquoi cela n'a pas de sens

Ce bruit devrait être la dérivée du mouvement brownien. Or le chapitre 2 a établi que W n'est **dérivable en aucun point**. L'objet $\xi(t) = dW/dt$ n'existe pas.

Le fond du problème

Si W était dérivable, ses accroissements sur $[t, t + h]$ seraient d'ordre h . Ils sont d'ordre $\sqrt{h}$. Un bruit assez irrégulier pour représenter le hasard des marchés est nécessairement trop irrégulier pour être dérivé.

L'irrégularité n'est pas un défaut du modèle : c'est ce qui le rend réaliste. Il faut donc un calcul qui l'accepte.

L'écriture différentielle

La solution consiste à ne jamais diviser par dt . On écrit directement les **accroissements** :

Équation différentielle stochastique (EDS)

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dW_t.$$

Comment la lire

Sur un court intervalle dt , la variation de X a deux composantes : une part **prévisible**, proportionnelle à la durée; une part **imprévisible**, proportionnelle à l'accroissement brownien.

L'écriture différentielle est une **abréviation**. Son sens rigoureux est intégral :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s, s) ds + \int_0^t b(X_s, s) dW_s.$$

Le point à ne pas manquer

La première intégrale est ordinaire. La seconde ne l'est pas : on intègre **par rapport à une trajectoire brownienne**. Tant que $\int b dW$ n'est pas défini, l'EDS n'a aucun contenu. C'est l'objet du chapitre 6.

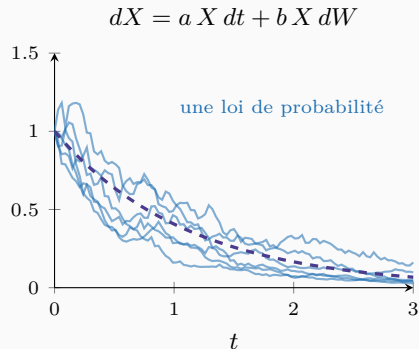
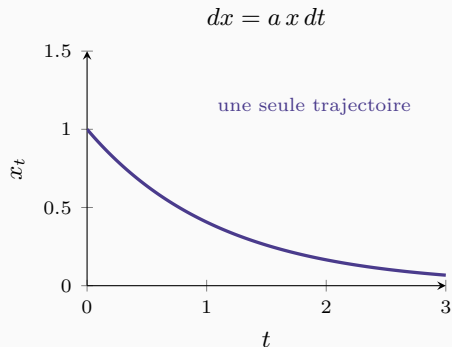
Les deux coefficients

- $a(X_t, t)$ est la **dérive** (*drift*) : la tendance moyenne, en unités par an.
- $b(X_t, t)$ est la **diffusion** : l'intensité du hasard, en unités par $\sqrt{\text{an}}$.

Lecture financière

La dérive porte l'espoir de rendement; la diffusion porte le risque. Toute la finance de marché consiste à arbitrer entre les deux — et le chapitre 10 montrera qu'on peut annuler la seconde.

Une trajectoire contre une loi



Même équation de dérive. À gauche une courbe; à droite un faisceau, dont la courbe de gauche n'est que la moyenne.

Le tableau de correspondance

Colonne par colonne

	Équation différentielle	Équation stochastique
Écriture	$\dot{x} = a(x, t)$	$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW$
Sens	dérivée en chaque point	forme intégrale
Inconnue	une fonction	un processus
Solution	une trajectoire	une loi de probabilité
Condition initiale	x_0 fixe la courbe	X_0 fixe la loi
Calcul	Taylor à l'ordre 1	Taylor à l'ordre 2
Croissance	$\dot{x} = ax \Rightarrow x_0 e^{at}$	$dX = aXdt + bXdW \Rightarrow ?$
Ajustement	$\dot{x} = a(\bar{x} - x)$	Ornstein-Uhlenbeck (ch. 9)

La ligne à retenir

Résoudre une EDS, ce n'est pas trouver une courbe : c'est décrire la **distribution** de X_t à chaque date. La ligne « croissance » porte un point d'interrogation — c'est le mouvement brownien géométrique, et le chapitre 8 le lèvera.

Ce que le hasard change au calcul

Développons $f(X_t)$ à l'ordre deux :

$$df = f'(X) dX + \frac{1}{2} f''(X) (dX)^2 + \dots$$

En calcul classique, $(dx)^2$ est d'ordre $(dt)^2$: négligeable. Ici, avec $dX = a dt + b dW$:

$$(dX)^2 = a^2(dt)^2 + 2ab dt dW + b^2(dW)^2.$$

Ce qui survit et ce qui disparaît

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dW = 0, \quad dW \cdot dW = dt.$$

Donc $(dX)^2 = b^2 dt$: un terme du **premier** ordre en dt , qu'on ne peut pas jeter.

La conséquence, annoncée

Le calcul différentiel stochastique n'est pas le calcul classique avec du bruit en plus. C'est un calcul où la formule de dérivation composée comporte un **terme supplémentaire**. Ce terme est le lemme d'Itô — et c'est lui qui produira le $-\sigma^2/2$ du chapitre 3.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 5

- On ne peut pas écrire dW/dt : le brownien n'est dérivable nulle part.
- On écrit donc en différentielles : $dX = a dt + b dW$, abréviation d'une forme **intégrale**.
- a est la dérive, b la diffusion ; résoudre, c'est obtenir une **loi**, pas une courbe.
- $(dW)^2 = dt$: le terme du second ordre survit, et impose un calcul différentiel nouveau.

Vers le chapitre 6

Tout repose sur un objet encore indéfini : l'intégrale $\int b dW$. Le chapitre suivant la construit, et montre que le choix — apparemment technique — du point où l'on évalue l'intégrande a une signification financière décisive.