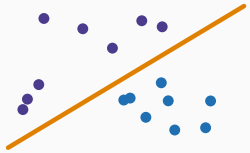
Analyse quantitative

Chapitre 12 : Rendements, volatilité et corrélation



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 29 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

Mesurer les rendements

Volatilité

La non-normalité

Corrélation et dépendance

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre

Pourquoi ce chapitre ?

Ce chapitre applique tout l'appareil précédent aux trois grandeurs que le gestionnaire de risques mesure quotidiennement : le **rendement**, la **volatilité** et la **corrélation**. Il montre pourquoi les rendements ne sont pas normaux, comment cela se teste, et pourquoi la corrélation linéaire est une mesure de dépendance dangereusement incomplète.

Mesurer les rendements

Rendement simple et rendement logarithmique

Les deux définitions

Le **rendement simple** est $R_t = (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$. Le **rendement logarithmique**, ou composé en continu, est $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$. On passe de l'un à l'autre par $1 + R_t = e^{r_t}$.

Deux additivités complémentaires

Les rendements **logarithmiques** s'additionnent **dans le temps** : $r_{1:T} = \sum_t r_t$. Les rendements **simples** s'agrègent **entre actifs** : le rendement d'un portefeuille est la moyenne pondérée des rendements de ses composantes. Aucune des deux mesures ne possède les deux propriétés — d'où leur coexistence.

L'erreur d'approximation

Le rendement logarithmique est toujours **inférieur** au rendement simple, et l'écart croît avec l'amplitude. Pour des variations de $\pm 12\%$, il reste sous 0,85 % ; mais pour un rendement simple de -40%, le log-rendement vaut -51%. Notons aussi que le rendement simple ne peut descendre sous -100%, alors que le log-rendement n'a pas cette borne. Les log-rendements sont donc adaptés aux **fréquences élevées**, où les variations sont faibles.

Volatilité

Volatilité et taux de variance

La **volatilité** est l'écart-type des rendements sur l'intervalle où ils sont mesurés. Le **taux de variance** en est le carré. La variance croît **linéairement** avec l'horizon, la volatilité en **racine carrée** :

$$\sigma_{\text{annuel}} = \sqrt{252}\,\sigma_{\text{quotidien}}, \qquad \sigma_{\text{annuel}} = \sqrt{12}\,\sigma_{\text{mensuel}}.$$

Une règle conditionnelle

Cette mise à l'échelle repose **entièrement** sur l'absence d'autocorrélation des rendements. L'hypothèse est plausible pour les actifs liquides, mais elle échoue dès qu'il y a autocorrélation — sur les fonds peu liquides, par exemple, elle sous-estime nettement le risque annualisé.

Volatilité implicite

La **volatilité implicite** est celle qui, injectée dans un modèle d'évaluation d'options comme Black-Scholes-Merton, reproduit le prix de marché observé. Contrairement aux mesures historiques, elle est **prospective** : elle reflète l'anticipation du marché. L'indice **VIX** en est l'exemple le plus connu, construit à partir des options sur le S&P 500.

La non-normalité

Ce que les deux premiers moments ne disent pas

L'insuffisance de la moyenne et de la variance

Deux distributions peuvent partager exactement la même moyenne et le même écart-type tout en présentant des risques de perte extrême radicalement différents. Décrire un rendement par ses deux premiers moments seulement revient à supposer implicitement la normalité.

Ce qu'implique une volatilité donnée

Sous hypothèse de normalité et pour une volatilité annualisée de 10 %, une perte quotidienne supérieure à 1 % ne survient que 5 % du temps. À 100 % de volatilité annualisée, 5 % des journées affichent des pertes de plus de 10,2 %, et une journée sur quatre dépasse 4,2 %. Le niveau de volatilité change entièrement la lecture du risque.

Le test de Jarque-Bera

$$JB = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right)$$

où S est l'asymétrie et K le kurtosis empiriques. Sous l'hypothèse de normalité, JB suit un khi-deux à 2 degrés de liberté. Le test rejette la normalité dès que l'asymétrie s'écarte de 0 ou le kurtosis de 3 — ce qui est le cas sur pratiquement toutes les séries de rendements financiers.

Corrélation et dépendance

Les limites de la corrélation linéaire

Corrélation ≠ dépendance

La **corrélation** de Pearson ne mesure que la composante **linéaire** de la dépendance. Deux variables peuvent être fortement dépendantes avec une corrélation nulle. Par ailleurs, la corrélation n'est pas invariante par transformation non linéaire : celle des rendements diffère de celle de leurs logarithmes.

Le danger en gestion des risques

La corrélation est estimée sur l'ensemble de l'échantillon, donc dominée par les périodes normales. Or ce qui compte est la **dépendance de queue** : la tendance de deux actifs à s'effondrer **ensemble**. Une corrélation moyenne de 0,3 peut masquer une dépendance quasi parfaite en régime de crise — c'est exactement ce qui a détruit les stratégies de valeur relative de LTCM.

Mesures alternatives

Corrélations de rang

Le **rho de Spearman** et le **tau de Kendall** se calculent sur les rangs plutôt que sur les valeurs. Ils captent toute relation **monotone**, même non linéaire, sont **robustes** aux valeurs extrêmes et **invariants** par transformation monotone croissante — trois propriétés dont la corrélation de Pearson est dépourvue.

Le modèle à un facteur

Lorsque plusieurs variables normales dépendent d'un **facteur commun**, la corrélation entre deux d'entre elles est le produit de leurs sensibilités respectives à ce facteur. Cette structure réduit considérablement le nombre de paramètres à estimer — au lieu d'une corrélation par paire, une sensibilité par actif — et fonde les modèles de risque de crédit de portefeuille.

Vers les copules

Séparer la **structure de dépendance** des lois marginales est précisément l'objet des copules, étudiées dans le cours d'économétrie financière. Les mesures de rang de ce chapitre en sont la première étape : elles ne dépendent que de la structure de dépendance, jamais des marges.

Synthèse

Ce qu'il faut retenir

Synthèse du chapitre

Les rendements **logarithmiques** s'additionnent dans le temps, les rendements **simples** entre actifs ; l'écart entre les deux devient important pour les grandes variations. La **volatilité** se met à l'échelle en $\sqrt{h}$ et la **variance** en h, mais uniquement en l'absence d'autocorrélation. La **volatilité implicite**, extraite des prix d'options, apporte l'information prospective qui manque aux mesures historiques. Les rendements ne sont **pas normaux** : asymétrie négative et kurtosis supérieur à 3, ce que confirme le test de **Jarque-Bera** et que décrit mieux une **loi de puissance** ; ces queues épaisses proviennent largement de la volatilité changeante. Enfin, la **corrélation** de Pearson ne capte que la dépendance linéaire et masque la dépendance de queue, celle qui compte en crise — d'où l'intérêt des corrélations de **rang** et des modèles à **facteur commun**.