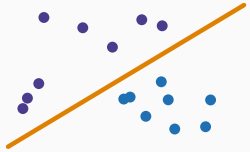
Analyse quantitative

Chapitre 3 : Les lois univariées usuelles



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 29 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

Les lois discrètes

Autour de la loi normale

Les mélanges de lois

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Il existe plus de deux cents lois de probabilité nommées. Ce chapitre présente celles qu'un gestionnaire de risques rencontre effectivement : trois lois **discrètes** pour compter des événements, une famille de lois **continues** organisée autour de la normale, et enfin les **mélanges**, qui permettent de construire des distributions épousant les traits des données financières réelles.

Les lois discrètes

Loi de Bernoulli

Une variable de **Bernoulli** ne prend que deux valeurs, 0 ou 1, avec $\Pr(Y = 1) = p$. Sa fonction de masse s'écrit $f(y) = p^y(1-p)^{1-y}$, et ses deux premiers moments sont

$$E[Y] = p, \qquad V[Y] = p(1-p).$$

La variance est **maximale** en $p = 0{,}5$ (elle y vaut 0,25) et tend vers 0 lorsque p approche 0 ou 1 : un événement quasi certain, ou quasi impossible, est peu incertain.

Usages en finance

Elle modélise tout événement binaire : défaut d'un emprunteur, marché haussier ou baissier, transaction frauduleuse ou non. On l'emploie aussi pour marquer le **dépassement de VaR** — la variable vaut 1 quand la perte excède la VaR, ce qui est le point de départ des tests de validation *a posteriori*.

Loi binomiale

La loi **binomiale** $B(n, p)$ compte le nombre de succès sur n épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité p :

$$f(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, \qquad \binom{n}{y} = \frac{n!}{y!\,(n-y)!}.$$

Ses moments s'obtiennent en sommant ceux des n Bernoulli indépendantes :

$$E[Y] = np, \qquad V[Y] = np(1-p).$$

Approximation normale

Lorsque $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$, la binomiale est bien approchée par une loi normale $N\big(np,\ np(1-p)\big)$. Pour p petit et n modeste, la distribution reste au contraire fortement **asymétrique à droite**.

Loi de Poisson

La loi de **Poisson** compte le nombre d'événements survenant sur un intervalle de temps fixé. Elle ne dépend que d'un paramètre λ, le **taux de hasard**, qui est le nombre moyen d'événements par intervalle :

$$f(y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}, \qquad E[Y] = V[Y] = \lambda.$$

Propriété remarquable : moyenne et variance sont **égales**.

Application

On l'utilise pour modéliser le nombre de défauts dans un portefeuille de crédit sur un trimestre, le nombre d'incidents opérationnels par mois, ou toute intensité d'arrivée d'événements rares. Elle est le fondement des modèles de survie et de la modélisation des taux de hasard.

Autour de la loi normale

Uniforme et normale

Loi uniforme

La loi **uniforme** sur $[a, b]$ attribue la même densité à tout point de l'intervalle : $f(x) = 1/(b-a)$. Sa moyenne vaut $(a+b)/2$ et sa variance $(b-a)^2/12$. Elle joue un rôle fondamental en **simulation** : par la transformation inverse $X = F^{-1}(U)$, une uniforme sur $[0, 1]$ engendre n'importe quelle autre loi.

Loi normale

La loi **normale** $N(\mu, \sigma^2)$ est entièrement décrite par sa moyenne et sa variance. Sa densité est symétrique en cloche, son asymétrie est nulle et son kurtosis vaut exactement **3**. Toute transformation linéaire d'une normale reste normale, et la **somme** de normales indépendantes est normale — propriété qui explique sa place centrale.

Pourquoi elle domine, et pourquoi elle trompe

Sa prééminence tient au **théorème central limite** (chapitre 5) et à sa commodité analytique. Mais ses queues décroissent très vite : elle attribue une probabilité quasi nulle à des mouvements que les marchés produisent régulièrement. C'est la limite majeure de toute mesure de risque gaussienne.

Log-normale

Loi log-normale

X suit une loi **log-normale** si $\ln X$ suit une loi normale. Elle est par construction **positive** et asymétrique à droite.

Le modèle de prix de référence

Si les rendements logarithmiques sont normaux, alors les **prix** sont log-normaux — ce qui garantit qu'un prix ne devient jamais négatif. C'est l'hypothèse au cœur du modèle de Black-Scholes et de la plupart des modèles d'évaluation d'options.

Khi-deux

La somme des carrés de ν variables normales centrées réduites indépendantes suit une loi du **khi-deux** à ν degrés de liberté. Sa moyenne vaut ν, sa variance 2ν. Elle est positive et asymétrique à droite, et intervient dans les tests portant sur une **variance**.

Student

La loi de **Student** à ν degrés de liberté est symétrique comme la normale, mais à queues plus **épaisses**. Sa variance vaut $\nu/(\nu-2)$ pour $\nu > 2$, et elle converge vers la normale quand ν augmente. Elle sert aux tests sur une moyenne à variance inconnue, et modélise directement les rendements à queues épaisses.

Fisher

Le rapport de deux khi-deux indépendants, chacun divisé par ses degrés de liberté, suit une loi de **Fisher** $F(\nu_1, \nu_2)$. Elle intervient dans les tests de comparaison de variances et dans les tests de significativité jointe en régression.

Exponentielle et bêta

Loi exponentielle

De densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$, elle décrit la **durée d'attente** entre deux événements de Poisson. Sa moyenne et son écart-type valent tous deux $1/\lambda$. Elle est **sans mémoire** : la probabilité d'attendre encore t ne dépend pas du temps déjà écoulé.

Loi bêta

Définie sur $[0, 1]$ et pilotée par deux paramètres de forme, la loi **bêta** épouse des formes très variées. Son support borné la rend naturelle pour modéliser une **proportion** — notamment le taux de recouvrement en cas de défaut, donc la LGD.

Les mélanges de lois

Construire une loi sur mesure

Distribution de mélange

Un **mélange** s'obtient en tirant au hasard dans deux lois composantes ou plus, selon des poids fixés. La loi résultante hérite de caractéristiques de chacune, sans se réduire à aucune.

Mélange de deux normales

Mélanger deux normales de **variances différentes** produit une distribution dont le kurtosis est **supérieur** à celui de chacune des composantes. On obtient ainsi des queues épaisses tout en conservant des briques gaussiennes analytiquement commodes.

Interprétation en régimes de marché

Un mélange s'interprète naturellement comme une alternance de **régimes** : la plupart du temps le marché est calme (faible variance), et parfois il est en crise (forte variance). Cette lecture reproduit à la fois les queues épaisses et l'agrégation de volatilité observées sur les données réelles.

Synthèse

Synthèse du chapitre

Trois lois **discrètes** suffisent à la plupart des applications : **Bernoulli** pour un événement binaire, **binomiale** pour compter des succès indépendants ($E = np, V = np(1-p)$), **Poisson** pour compter des événements rares sur une période ($E = V = \lambda$). Côté **continu**, l'**uniforme** est la brique de la simulation, la **normale** est centrale par le théorème central limite mais sous-estime gravement les extrêmes, et la **log-normale** garantit la positivité des prix. Les lois du **khi-deux**, de **Student** et de **Fisher** structurent l'inférence, Student offrant en outre des queues épaisses réalistes. L'**exponentielle** décrit les durées d'attente, la **bêta** les proportions comme la LGD. Enfin, les **mélanges** permettent de construire des distributions à queues épaisses à partir de composantes gaussiennes, ce qui s'interprète comme une alternance de régimes de marché.