

Analyse mathématique

Chapitre 1 : Rappels — ensembles de nombres et fonctions



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Prérequis

Avant de commencer

Ensembles de nombres

Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Un aperçu des nombres complexes

Topologie et convexité dans $\mathbb{R}^n$

Synthèse

Prérequis

Ce que ce cours suppose acquis

Aucun cours préalable

Le programme du baccalauréat. Le cours reprend la construction depuis les suites et les limites.

Les notions mobilisées

L'algèbre élémentaire, la notion de fonction, la lecture d'un graphique. Les inégalités et la valeur absolue.

Repris depuis le début

Limite, continuité, dérivabilité, intégrale : **tout est établi ici**, avec les démonstrations.

Ce cours et *Mathématiques pour la gestion* se recoupent volontairement : le second va au plus vite vers l'application, le premier prend le temps de la construction. Les suivre tous deux n'est pas redondant.

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Avant de parler de limites, de dérivées ou d'optimisation, il faut un langage commun : les ensembles de nombres, l'ordre sur $\mathbb{R}$, et la notion de fonction. Ce chapitre pose ces fondations.

Ensembles de nombres

Notations

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$: entiers **naturels**.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: entiers **relatifs**.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$: nombres **rationnels**.
- $\mathbb{R}$: nombres **réels**, identifiés aux points d'une droite orientée (la droite réelle).

On a les inclusions **strictes** : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, car par exemple $\pi \in \mathbb{R}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Exemple

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}.$$

Application en sciences économiques

Une quantité de biens **discrets** (nombre de voitures vendues) vit dans $\mathbb{N}$; un prix, un taux d'intérêt, une quantité de bien **divisible** (litres de pétrole) vivent dans $\mathbb{R}^+$. Le choix de l'ensemble n'est pas anodin : il détermine si l'on peut dériver la fonction de demande.

Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Propriétés de $\leq$

La relation $\leq$ est un **ordre total** sur $\mathbb{R}$: réflexive, antisymétrique, transitive, et $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ ou $y \leq x$.

Elle est compatible avec l'addition et la multiplication par un réel positif :

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \quad z \geq 0, \quad x \leq y \Rightarrow xz \leq yz.$$

Attention

Multiplier par un nombre **négatif** renverse l'inégalité : $z < 0, x \leq y \Rightarrow xz \geq yz$. C'est l'erreur la plus fréquente en optimisation sous contrainte.

Densité

$\mathbb{R}$ est **dense** : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y, \exists z \in \mathbb{R} : x < z < y$. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$; $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne le sont pas.

Définitions

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- b est un **majorant** de A si $\forall x \in A : x \leq b$; A est **majoré** s'il en admet un.
- Le plus petit majorant est le **supremum**, noté $\sup A$; s'il appartient à A , c'est le **maximum**, $\max A$.
- On définit de façon symétrique **minorant**, **majoré/minoré** $\square$ **borné**, **infimum** $\inf A$ et **minimum** $\min A$.

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{R}$, tout ensemble non vide **majoré** admet un supremum, et tout ensemble non vide **minoré** admet un infimum — même quand il n'y a pas de maximum ou de minimum (ex. $(0, 1)$: $\sup = 1$ mais pas de maximum).

Application en sciences économiques

Un **budget** contraint l'ensemble des paniers accessibles; sa borne supérieure (le revenu disponible) est le majorant qui structure tout problème du consommateur. Un **prix plancher** ou un **prix plafond** réglementaire sont des minorants/majorants imposés au marché.

Sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$

Convexité dans $\mathbb{R}$

$A \subset \mathbb{R}$ est **convexe** si :

$$\forall x, y \in A, \forall z \in \mathbb{R} : x \leq z \leq y \Rightarrow z \in A.$$

Les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les **intervalles**, les **demi-droites** et les triviaux $\emptyset, \mathbb{R}$:

- fermé $[a, b]$, ouvert (a, b) , semi-ouverts $[a, b)$, $(a, b]$;
- demi-droites fermées $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$; ouvertes $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$.

Application en sciences économiques

Les contraintes de **positivité** ($x \geq 0$) et les **plages admissibles** (taux d'intérêt $\in [0, 1]$, part de marché $\in [0, 1]$) sont des intervalles — le premier exemple d'ensembles convexes que l'on rencontrera à nouveau au chapitre 3 (optimisation) et au chapitre 5.

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Définitions

f est une **fonction** de A dans B si à tout $x \in A$ correspond un **unique** $f(x) \in B$; on note $f : A \rightarrow B : x \rightarrow f(x)$.

$A = \text{Dom } f$ est le **domaine**. Le **graphe** est la courbe $y = f(x)$, $x \in A$. L'**image** est $\text{Im } f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.

Exemple

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightarrow \max\{x, 1\}$. Tous les points de $(-\infty, 1]$ ont pour image 1; les autres sont envoyés sur eux-mêmes. On a $\text{Im } f(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définitions

Soit $f : A \rightarrow B : x \rightarrow f(x)$.

- f est **injective** si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (chaque image vient d'un seul antécédent);
- f est **surjective** si $\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)$ (tout point de B est atteint);
- f est **bijective** si injective et surjective; elle admet alors une **fonction réciproque** $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Composée de fonctions

Si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$, la **composée** $g \circ f : A \rightarrow C$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ – le passage d'un *input* brut à un *output* final via une étape intermédiaire.

Application en sciences économiques

Une fonction de **demande** $q = D(p)$ n'est **inversible** (on peut écrire $p = D^{-1}(q)$, la *demande inverse* utilisée en microéconomie) que si D est **injective** – typiquement, si elle est strictement décroissante. C'est pourquoi les modèles supposent presque toujours la monotonie stricte des fonctions d'offre et de demande.

Un aperçu des nombres complexes

Pourquoi sortir de $\mathbb{R}$?

Nombres complexes

$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Le **conjugué** de $z = a + bi$ est $\bar{z} = a - bi$; le **module** est $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Théorème de D'Alembert

Tout polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet exactement n racines complexes (distinctes ou non). En particulier, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) admet toujours une solution dans $\mathbb{C}$, via $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ce qu'il faut retenir

Ce cours reste presque exclusivement dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$. Les complexes n'interviennent, en économie, que ponctuellement — par exemple pour étudier la **stabilité** de modèles dynamiques linéaires (les racines complexes d'une équation caractéristique gouvernent l'apparition de cycles amortis ou explosifs).

Topologie et convexité dans $\mathbb{R}^n$

Définitions dans $\mathbb{R}^n$

Pour $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $q = (q_1, \dots, q_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, la **distance euclidienne** est

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}.$$

La **boule ouverte** de rayon r centrée en p est $B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(p, x) < r\}$ – elle généralise l'intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définitions

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}^n$.

- p est **intérieur** à A si $\exists r > 0 : B(p, r) \subset A$; $\text{Int } A$ = ensemble de ces points; A est **ouvert** si $\text{Int } A = A$.
- p est **adhérent** à A si $\forall r > 0 : B(p, r) \cap A \neq \emptyset$; $\text{Adh } A$ = ensemble de ces points; A est **fermé** si $\text{Adh } A = A$.

Exemple dans $\mathbb{R}^2$

$B((0,0), 2) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$ est ouvert; $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ est fermé;
 $\{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ est ouvert mais **non convexe**.

Définition

$A \subset \mathbb{R}^n$ est **convexe** si

$$\forall p, q \in A, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda p + (1 - \lambda)q \in A$$

— tout segment reliant deux points de A reste dans A .

Application en sciences économiques

L'espace des biens est $\mathbb{R}_+^n$ (n biens, quantités positives). Un **panier de consommation** est un point $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. La **convexité** de l'ensemble de budget, et celle des préférences du consommateur, sont les hypothèses qui garantissent l'existence d'un optimum bien défini — thème central du chapitre 5.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 1

- **Ensembles** : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ est dense et complet (sup/inf existent).
- **Sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$** = intervalles et demi-droites.
- **Fonction $f : A \rightarrow B$** : domaine, image, injectivité/surjectivité/bijektivité, réciproque.
- $\mathbb{R}^n$: distance, boule ouverte, ouvert/fermé, convexité — le décor des chapitres 4 et 5.

Vers le chapitre 2

Muni de ce vocabulaire, nous allons étudier en profondeur les fonctions d'une seule variable réelle : leur comportement **local** (limites, continuité, dérivabilité) puis leur **optimisation** (chapitre 3).