

Analyse mathématique

Chapitre 3 : Optimisation des fonctions d'une variable



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Les types d'extrema

Condition suffisante d'existence

Condition nécessaire du premier ordre

Trancher pour chaque candidat

Extrema globaux

Concavité, convexité et extrema globaux

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Maximiser un profit, minimiser un coût : l'optimisation est **au cœur** de la modélisation économique. Ce chapitre transforme les outils du chapitre 2 (dérivée, concavité) en une méthode systématique pour trouver un optimum.

Les types d'extrema

Définitions

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D$.

- **Maximum global** en $a : \forall x \in D : f(a) \geq f(x)$.
- **Maximum local** en $a : \exists$ voisinage $V(a)$ tel que $\forall x \in V(a) \cap D : f(a) \geq f(x)$.
- Version **stricte** : inégalité stricte pour $x \neq a$. (Symétriquement pour les minima.)

À retenir

Tout maximum **global** est aussi **local**, mais l'inverse est faux. Une fonction peut avoir plusieurs maxima locaux et un seul maximum global — ou aucun optimum global du tout si le domaine n'est pas favorable.

Condition suffisante d'existence

Propriété

Si f est **continue** dans un intervalle **fermé et borné** $[a, b]$, alors f admet un **maximum global** et un **minimum global** dans $[a, b]$.

Pourquoi c'est important

En dehors de ce cadre (domaine ouvert, non borné, ou fonction discontinue), **rien ne garantit** l'existence d'un optimum global — même local. La première question à se poser, avant tout calcul, est donc : *le théorème de Weierstrass s'applique-t-il ?*

Application en sciences économiques

Une entreprise qui choisit une quantité $q \in [0, \bar{q}]$ (capacité de production finie) est assurée d'avoir un profit maximal atteint quelque part sur cet intervalle **fermé** — ce qui n'est pas garanti si l'on autorise $q \rightarrow +\infty$ sans hypothèse supplémentaire sur le coût.

Condition nécessaire du premier ordre

Point critique

Si f est dérivable en a et admet un extremum **local** en a , alors $f'(a) = 0$: a est un **point critique** (tangente horizontale).

Méthode : dresser la liste des candidats

Un extremum local ne peut se situer qu'en l'un de ces trois types de points :

1. les **points critiques** ($f'(a) = 0$);
2. les **bords** du domaine ($D \setminus D'$) — dits *solutions de coin*;
3. les points où f **n'est pas dérivable** (points anguleux).

Application en sciences économiques

La condition $f'(a) = 0$ traduit l'idée centrale de l'analyse marginale : à l'optimum, une petite variation de la décision (quantité, prix, investissement) ne change **plus** la valeur de l'objectif au premier ordre — coût marginal = revenu marginal en est l'exemple le plus célèbre.

Trancher pour chaque candidat

Propriété

Si f est deux fois dérivable en a , $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$, alors :

$$f''(a) < 0 \Rightarrow \text{maximum local en } a, \quad f''(a) > 0 \Rightarrow \text{minimum local en } a.$$

Exemple

$f(x) = x^3 - 3x - 2$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Comme $f''(x) = 6x$:
 $f''(-1) = -6 < 0$ (maximum local en -1), $f''(1) = 6 > 0$ (minimum local en 1).

Quand $f''(a) = 0$: la condition d'ordre n

Propriété (ordre supérieur)

Si $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f^{(n)}(a) \neq 0$:

- n pair et $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow$ maximum local; n pair et $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow$ minimum local;
- n impair $\Rightarrow$ **pas d'extremum** en a (point d'inflexion à tangente horizontale).

Sans calculer f''

Si f change de signe de $+$ à $-$ autour de a (f croissante puis décroissante) $\Rightarrow$ maximum local en a (et inversement pour un minimum). Cette méthode s'applique **même** aux points où f n'est pas dérivable ou situés en un bord du domaine.

Extrema globaux

Méthode

Une fois tous les extrema **locaux** identifiés, l'extremum **global** (s'il existe) s'obtient en comparant les valeurs $f(x)$ en chacun d'eux — le plus grand pour un maximum global, le plus petit pour un minimum global.

Cas favorable

Si f est continue sur un intervalle **fermé et borné** (Weierstrass), la comparaison suffit : l'existence est garantie. Sinon, il faut examiner en plus le comportement de f aux bords exclus et pour $x \rightarrow \pm\infty$.

Concavité, convexité et extrema globaux

Propriété

Soit D convexe et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable dans D' .

- Si f est **concave** dans D : $f'(a) = 0 \iff f$ admet un **maximum global** en a .
- Si f est **convexe** dans D : $f'(a) = 0 \iff f$ admet un **minimum global** en a .

Pourquoi c'est puissant

Sous concavité, la condition du **premier ordre suffit** : plus besoin d'examiner la dérivée seconde, ni de comparer plusieurs candidats. C'est la raison pour laquelle les modèles économiques supposent si souvent des fonctions concaves (production, utilité) ou convexes (coût).

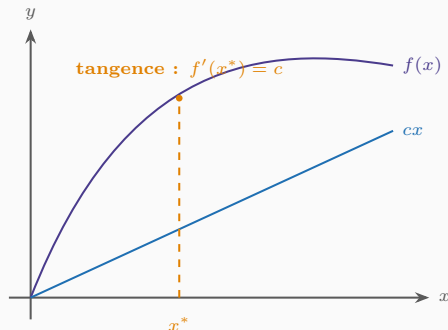
Exemple : le producteur (Monsieur X)

Exemple

$f(x)$ = valeur produite pour x heures de travail, **concave** et dérivable, coût du travail $C(x) = cx$. Le profit $g(x) = f(x) - cx$ est concave. L'optimum x^* vérifie :

$$g'(x^*) = 0 \iff f'(x^*) = c$$

(productivité marginale = coût marginal).



Solution de coin

Si $f'(x) \leq c$ pour tout $x \geq 0$ (jamais rentable de produire davantage), la solution optimale est la **solution de coin** $x^* = 0$ – un cas fréquent qu'il ne faut jamais négliger.

Application en sciences économiques

Une firme en monopole sur deux marchés, avec demandes $q_1 = 40 - 2p_1$ et $q_2 = 20 - \frac{1}{2}p_2$ et coût $C = 25 + 4q$: maximiser séparément $R_1(q_1) - C$ et $R_2(q_2) - C$ (condition $R'_i = C'$) donne des **prix différents** sur chaque marché ($p_1 = 12, p_2 = 22$) – la discrimination de prix par les tiers, illustration directe de la condition du premier ordre appliquée deux fois.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 3

- **Weierstrass** : f continue sur $[a, b] \Rightarrow$ extrema globaux garantis.
- **Candidats** : points critiques ($f' = 0$), bords, points non dérivables.
- **Trancher** : signe de f'' (ordre 2), ou tableau de signes de f' .
- **Raccourci concave/convexe** : $f'(a) = 0$ devient une condition **nécessaire et suffisante** d'optimum global.

Vers le chapitre 4

En pratique, une décision économique dépend rarement d'**une seule** variable. Le chapitre 4 étend tout ce vocabulaire — limite, continuité, dérivée — aux fonctions de plusieurs variables.