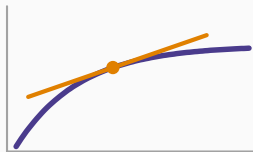


Analyse mathématique

Chapitre 5 : Optimisation des fonctions de plusieurs variables



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Extrema libres

Extrema liés : contraintes d'égalité

Extrema liés : contraintes d'inégalité

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Aucune décision économique réaliste n'est libre de toute contrainte : un budget, une capacité de production, une quantité qui ne peut être négative. Ce chapitre généralise l'optimisation du chapitre 3 à plusieurs variables, **libres** puis **sous contrainte**.

Un saut conceptuel : le nombre de dérivées explose

Une fonction d'une variable admet une seule dérivée première, une seule dérivée seconde. Une fonction de n variables en admet n (dérivées partielles premières) puis n^2 (dérivées partielles secondes). Les conditions d'optimalité, plus riches, s'en trouvent mécaniquement plus lourdes à formuler — d'où l'appui systématique sur le gradient et la hessienne du chapitre 4.

Extrema libres

Extrema d'une fonction de n variables

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$.

- f admet un **maximum global** en a si $\forall x \in D : f(x) \leq f(a)$;
- f admet un **minimum global** en a si $\forall x \in D : f(a) \leq f(x)$;
- f admet un **maximum (minimum) local** en a si l'inégalité correspondante n'est vérifiée que sur un voisinage $V(a)$ de a .

Comme au chapitre 3

Les définitions se transposent telles quelles depuis le cas d'une variable : tout extremum global est local, l'inverse est faux, et l'on peut parler d'extrema **stricts** (inégalité stricte pour $x \neq a$).

Existence d'extrema globaux (Weierstrass, cas multivarié)

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** dans $D \subset \mathbb{R}^n$ et si D est **fermé et borné** (on dit **compact**), alors f admet un maximum global **et** un minimum global dans D .

Portée et limites

Ce résultat est précieux — le gestionnaire cherche des optima globaux — mais son hypothèse de compacité est restrictive : beaucoup de problèmes économiques portent sur des variables non bornées. Deux idées viendront compenser cette limite : la **concavité/convexité** globale (ci-dessous), et un traitement systématique des **bords** du domaine (via Lagrange et Kuhn-Tucker, plus loin), bien plus délicats à $n \geq 2$ variables qu'à une seule, où il n'y avait que deux bords possibles.

Point critique

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a et y admet un extremum **local**, alors

$$\nabla f(a) = 0 \iff \forall i = 1, \dots, n : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

a est alors appelé **point critique** (ou point stationnaire).

Dresser la liste des candidats

Comme au chapitre 3, un extremum local ne peut se situer qu'en l'un de ces trois types de points : les **points critiques** ($\nabla f = 0$), les points où f **n'est pas différentiable**, et les **bords** du domaine. Dans cette section, D est supposé **ouvert** : il n'a pas de bords, d'où le nom d'extrema « libres ».

Critère de convexité/concavité

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et convexe, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, et a un point critique.

- Si f est **convexe** dans D , alors f admet un **minimum global** en a ;
- Si f est **concave** dans D , alors f admet un **maximum global** en a .

Application en sciences économiques : la firme

Une firme utilisant capital K et travail W , avec fonction de production **concave** $f(K, W)$ et prix unitaires p (output), r , w (facteurs), maximise $\pi(K, W) = p f(K, W) - rK - wW$ – concave, comme somme d'une fonction concave et d'une fonction affine. La condition du premier ordre

$$p \frac{\partial f}{\partial K} = r, \quad p \frac{\partial f}{\partial W} = w$$

(valeur du produit marginal = coût du facteur) donne **directement** l'optimum global grâce à la concavité. Pour une Cobb-Douglas $f(K, W) = K^\alpha W^\beta$ à rendements décroissants ($\alpha + \beta < 1$), on en déduit, en notant $z = K^\alpha W^\beta$ le niveau de production optimal, la **fonction d'offre** de la firme :

$$z^{1-\alpha-\beta} = \left(\frac{p\alpha}{r}\right)^\alpha \left(\frac{p\beta}{w}\right)^\beta.$$

Condition suffisante du second ordre : la hessienne

Classification par la hessienne

Soit a un point critique de $f \in C^2$, D ouvert. Selon la nature de $Hf(a)$:

- **définie positive** $\Rightarrow$ minimum local;
- **définie négative** $\Rightarrow$ maximum local;
- **indéfinie** $\Rightarrow$ **point-selle** (ni max, ni min) – critère du point-selle;
- **semi-définie** $\Rightarrow$ cas douteux, la hessienne ne permet pas de conclure (étude directe nécessaire).

Test pratique en dimension 2 : les mineurs principaux

Pour $Hf(a) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$, notons $D_1 = f_{xx}$, $D_2 = \det Hf = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$:

- $D_1 > 0$ et $D_2 > 0 \Rightarrow$ minimum local;
- $D_1 < 0$ et $D_2 > 0 \Rightarrow$ maximum local;
- $D_2 < 0 \Rightarrow$ point-selle;
- $D_2 = 0 \Rightarrow$ cas douteux.

Condition suffisante du second ordre : la hessienne (suite)

Exemple : un point-selle et un minimum non global

$f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$. Les points critiques résolvent $f_x = 2x - 2y = 0$ et $f_y = 3y^2 - 2x - 1 = 0$, soit $x = y$ et $3y^2 - 2y - 1 = 0$: deux candidats, $(1, 1)$ et $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

En $(1, 1)$: $Hf = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 8 > 0 \Rightarrow$ **minimum local**, $f(1, 1) = -1$ – mais **pas global**, puisque $f(0, -2) = -6 < -1$.

En $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$: $D_2 = -8 < 0 \Rightarrow$ **point-selle**.

Exemple : domaine ouvert borné

$f(x, y) = x^2 + y^2$ sur le disque ouvert $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. L'unique point critique est $(0, 0)$; comme $\forall (x, y) \in D : f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$, il s'agit d'un **minimum global**, établi ici directement par la définition plutôt que par la hessienne. En revanche f **n'admet aucun maximum** : la borne supérieure (atteinte en norme 1) n'appartient pas au domaine, qui est borné mais **pas fermé** – Weierstrass ne s'applique pas.

Extrema liés : contraintes d'égalité

Problème lié et lagrangien

Maximiser (ou minimiser) $f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, sous les contraintes $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$ ($m < n$). On introduit les **multiplicateurs de Lagrange** $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ et le **lagrangien** :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x).$$

Les solutions du système $\nabla_{x,\lambda} \mathcal{L} = 0$ sont les **points critiques du lagrangien**.

Pourquoi un problème plus grand résout un problème contraint

Ajouter les m multiplicateurs peut sembler alourdir le problème — de n à $n + m$ variables. C'est pourtant ce détour qui permet d'incorporer directement la ou les contraintes dans une condition du premier ordre unique, sans devoir isoler une variable en fonction des autres.

Le théorème de Lagrange

Théorème de Lagrange

Si $f, g_1, \dots, g_m$ sont de classe C^1 et si a résout le problème lié en un point **régulier** des contraintes (jacobienne des g_j de rang plein m en a), alors il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que (a, λ^*) est point critique de $\mathcal{L}$:

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(a), \quad g_j(a) = 0 \quad (j = 1, \dots, m).$$

Lecture géométrique : la tangence

Pour $n = 2, m = 1$: $\nabla f(a) = \lambda^* \nabla g(a)$ signifie que les gradients de f et de g sont **colinéaires** en a — la courbe de niveau de f passant par a est **tangente** à la contrainte $g(x) = 0$. C'est exactement la condition de tangence entre courbe d'indifférence et droite de budget en microéconomie.

Exemple : le consommateur Cobb-Douglas

Maximiser $U(x, y) = \sqrt{xy}$ sous $p_1x + p_2y = R$. Le lagrangien $\mathcal{L} = \sqrt{xy} - \lambda(p_1x + p_2y - R)$ donne

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} = \lambda p_1, \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} = \lambda p_2 \implies \frac{y}{x} = \frac{p_1}{p_2},$$

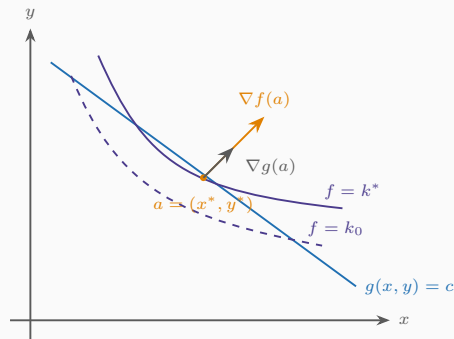
Interprétation du multiplicateur

Prix implicite (shadow price)

En paramétrant le niveau des contraintes $g_j(x) = R_j$ et en notant $F(R) = f(x^*(R))$ la valeur optimale, on a, sous les conditions de régularité usuelles :

$$\lambda_j^* = \frac{\partial F(R)}{\partial R_j}.$$

Le multiplicateur mesure la variation de l'objectif optimal pour une unité supplémentaire de ressource j — nul si la contrainte est superflue, élevé si elle pénalise fortement l'optimum.



Application en sciences économiques : le consommateur

Reprenons $U(x, y) = \sqrt{xy}$ sous $p_1x + p_2y = R$. Le multiplicateur optimal λ^* s'interprète comme l'utilité marginale du revenu :

$$\lambda^* = \frac{\partial U(x^*(R), y^*(R))}{\partial R}.$$

Hessienne partielle et conditions du second ordre

Soit $\mathcal{L}$ de classe C^2 et $H_{\mathcal{L}}(x, \lambda) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ sa **hessienne partielle** (dérivées par rapport aux x_i seulement). En un point critique (x^*, λ^*) :

- $H_{\mathcal{L}}(x^*, \lambda^*)$ définie positive $\Rightarrow$ **minimum local lié** ;
- $H_{\mathcal{L}}(x^*, \lambda^*)$ définie négative $\Rightarrow$ **maximum local lié** ;
- $H_{\mathcal{L}}(x, \lambda^*)$ semi-définie positive $\forall x \in D \Rightarrow$ **minimum global lié** ;
- $H_{\mathcal{L}}(x, \lambda^*)$ semi-définie négative $\forall x \in D \Rightarrow$ **maximum global lié**.

Contrairement aux extrema libres, une hessienne **indéfinie** ne permet ici **aucune** conclusion.

Retour à l'exemple : un optimum global via la semi-définie

Pour $U(x, y) = \sqrt{xy}$ ci-dessus, on calcule $H_{\mathcal{L}}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^{-3/2}y^{1/2} & \frac{1}{4}x^{-1/2}y^{-1/2} \\ \frac{1}{4}x^{-1/2}y^{-1/2} & -\frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2} \end{pmatrix}$, dont le déterminant est **nul** sur tout $D = \{x > 0, y > 0\}$: elle est **semi-définie négative** partout — pas seulement au point critique. On conclut donc à un **maximum global lié**, cohérent avec le caractère concave (mais non strictement) de la racine du produit $\sqrt{xy}$.

Extrema liés : contraintes d'inégalité

Vocabulaire

Pour une contrainte $g(x) \leq 0$ en un point admissible a :

- elle est **saturée** (active) si $g(a) = 0$ – la frontière est atteinte;
- elle est **non saturée** si $g(a) < 0$ – localement sans effet sur l'optimum.

Un point a est **régulier** si la jacobienne des contraintes **saturées** en a est de rang maximum; sinon il est **singulier**, et automatiquement retenu comme candidat.

Intuition

Une contrainte non saturée peut être **ignorée** au voisinage de l'optimum : tout se passe comme si elle n'existait pas. Seules les contraintes saturées influencent la condition d'optimalité.

Exemple : extrema sur un disque fermé

Optimiser $f(x, y) = x + y - 1$ sous $x^2 + y^2 \leq 1$. Comme $\nabla f = (1, 1) \neq (0, 0)$ partout, il n'y a **aucun point critique intérieur** : les candidats sont sur le bord $x^2 + y^2 = 1$. Le lagrangien associé, $\mathcal{L} = x + y - 1 - \mu(x^2 + y^2 - 1)$, donne $x = y = \frac{1}{2\mu}$, d'où, avec la contrainte, deux candidats : $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Le domaine (disque fermé) est **compact** : Weierstrass garantit l'existence d'un maximum et d'un minimum globaux, atteints respectivement en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ (valeur $\sqrt{2} - 1$) et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ (valeur $-\sqrt{2} - 1$).

Conditions de Kuhn-Tucker (maximisation)

Pour maximiser $f(x)$ sous $g_i(x) \leq 0$ ($i = 1, \dots, p$) et, le cas échéant, $h_k(x) = 0$ ($k = 1, \dots, m$), avec lagrangien $\mathcal{L} = f(x) - \sum_i \mu_i g_i(x) - \sum_k \lambda_k h_k(x)$, un optimum a en un point **régulier** vérifie :

$$\mu_i \geq 0, \quad \nabla_x \mathcal{L}(a, \mu, \lambda) = 0, \quad \mu_i g_i(a) = 0 \quad (\text{conditions d'exclusion}).$$

Lire la condition d'exclusion

$\mu_i g_i(a) = 0$ signifie : **soit** la contrainte i est saturée ($g_i(a) = 0$), **soit** son multiplicateur est nul ($\mu_i = 0$). Si **aucune** contrainte n'est saturée en un extremum, tous les μ_i s'annulent et le théorème se réduit à la condition des extrema libres ; si **toutes** les contraintes actives le sont sous forme d'égalité, on retrouve le théorème de Lagrange. Kuhn-Tucker **généralise** ainsi les deux résultats précédents.

Retour à l'exemple, via Kuhn-Tucker

Reprenons $f(x, y) = x + y - 1$ sous $x^2 + y^2 \leq 1$, avec $\mathcal{L} = x + y - 1 - \mu(x^2 + y^2 - 1)$. La condition d'exclusion $\mu(x^2 + y^2 - 1) = 0$ exclut $\mu = 0$ (impossible avec $\nabla f \neq 0$) : la contrainte est **nécessairement saturée**, ce qui ramène le problème à l'égalité $x^2 + y^2 = 1$ déjà résolue — retrouvant les deux mêmes candidats, avec $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ au maximum.

Application en sciences économiques : solution de coin

Consommateur maximisant $U(x, y)$ sous $p_1x + p_2y \leq R$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Si le bien y procure une utilité marginale trop faible dès $y = 0$, la contrainte $y \geq 0$ est **saturée** : $y^* = 0$ (solution de coin), et son multiplicateur est **strictement positif**. C'est l'outil qui traite proprement les biens non consommés — un cas que Lagrange seul (contraintes d'égalité) ne peut pas capturer.

Application en sciences économiques : capacité de production

Une firme minimise son coût $C(K, W)$ sous $f(K, W) \geq \bar{q}$ (niveau de production imposé) et $K \leq \bar{K}$ (capacité en capital limitée). Si $\bar{K}$ n'est pas contraignante, son multiplicateur est nul et le problème se résout comme si la contrainte de capacité n'existait pas; si elle **sature**, le multiplicateur mesure le **coût marginal de la capacité manquante** — une information clé pour décider d'investir.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 5

- **Extrema libres** : candidats = points critiques ($\nabla f = 0$); hessienne définie/indéfinie tranche en local; concavité/convexité $\Rightarrow$ optimum global directement.
- **Lagrange** (contrainte d'égalité) : point critique du lagrangien $\mathcal{L} = f - \sum \lambda_j g_j$; hessienne partielle pour classer; λ^* = prix implicite (sensibilité à la contrainte).
- **Kuhn-Tucker** (contrainte d'inégalité) : ajoute $\mu \geq 0$ et la condition d'exclusion $\mu g = 0$ – généralise à la fois les extrema libres et le théorème de Lagrange, et traite proprement les solutions de coin.

Fin du parcours

Ces cinq chapitres — des ensembles de nombres à Kuhn-Tucker — couvrent l'essentiel des outils d'analyse utilisés dans le reste du cursus : microéconomie (théorie du consommateur et du producteur), macroéconomie, et économétrie.