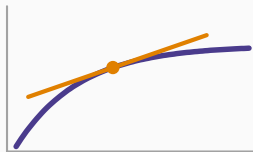


Analyse mathématique

Chapitre 2 : Fonctions d'une variable — limites, continuité, dérivabilité



Plan du chapitre

Avant de commencer

Limites de fonctions

Continuité

Asymptotes

Dérivabilité

Le théorème de Taylor

Monotonie, concavité, convexité

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Les extrema (chapitre 3) reposent sur la dérivée ; la dérivée repose sur la limite. Ce chapitre construit, dans l'ordre, limite $\rightarrow$ continuité $\rightarrow$ dérivabilité, puis introduit les notions qui décrivent la « forme » d'une fonction.

Limites de fonctions

Domaine D'

Pour $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, le **domaine d'examen des limites bilatérales** D' est l'ensemble des points que l'on peut approcher, par la gauche **et** par la droite, tout en restant dans D – sans que le point lui-même doive appartenir à D .

Exemple

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On a $D' = (0, 1)$: en 0 on ne peut approcher que par la droite ($0 \in D'_D$), en 1 que par la gauche ($1 \in D'_G$).

Limite bilatérale et limites unilatérales

Limite en un point

f a pour limite b quand $x \rightarrow a$ (noté $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$) si les valeurs de $f(x)$ se rapprochent d'aussi près que l'on veut de b lorsque x se rapproche d'aussi près que l'on veut de a (avec $x \neq a$).

Si le comportement diffère à gauche et à droite, on parle de **limite à gauche** ($\lim_{x \rightarrow a^-}$) et de **limite à droite** ($\lim_{x \rightarrow a^+}$).

Propriété clé

La limite bilatérale existe **si et seulement si** les deux limites unilatérales existent et coïncident. C'est l'outil standard pour établir la **non-existence** d'une limite en un point charnière (fonction définie par morceaux).

Application en sciences économiques

Une fonction de coût total définie par paliers (tarification par tranches, ex. électricité) a des limites à gauche et à droite différentes aux points de rupture : le coût **n'est pas continu**, ce qui a des implications directes sur le coût marginal.

Extensions

On étend la notion de limite : comportement de f quand $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ (asymptotes horizontales), et cas où $f(x) \rightarrow \pm\infty$ quand $x \rightarrow a$ (asymptotes verticales, voir plus loin).

Règles de calcul et pincement

Les règles usuelles (somme, produit, quotient, composée) s'appliquent tant qu'on n'obtient pas une forme indéterminée ($\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$...). Le **principe du pincement** ($f \leq g \leq h$ et $\lim f = \lim h = b \Rightarrow \lim g = b$) permet de conclure quand le calcul direct échoue.

Continuité

Continuité en un point et dans un domaine

Continuité

f est **continue en** a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. f est **continue dans** D si elle l'est en tout point de D (avec les adaptations à gauche/droite aux bords).

Le **domaine de continuité** D_C est le plus grand sous-ensemble de D où f est continue.

Exemple

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq f(0) = 3$: f n'est **pas continue** en 0 (mais continue à droite).

Méthode pratique

1. Décomposer f en somme/produit/composée de fonctions de référence (continues sur leur domaine);
2. Aux points « charnières » (changement d'expression), calculer explicitement les limites à gauche et à droite;

Théorème de Brouwer

Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est **continue**, alors $\exists c \in [a, b] : f(c) = c$ (**point fixe**) – existence garantie, unicité non garantie.

Application en sciences économiques

Le théorème de Brouwer (et sa généralisation à $\mathbb{R}^n$, Kakutani) est l'outil qui garantit l'**existence d'un équilibre général** en économie : un vecteur de prix qui égalise offre et demande sur tous les marchés simultanément est un point fixe d'une fonction de meilleure réponse.

Asymptotes

Définitions

- **Asymptote verticale** en a : $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$ (le graphe « part à l'infini » en restant collé à la droite $x = a$).
- **Asymptote horizontale** : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ (le graphe se rapproche de $y = b$).
- **Asymptote oblique** $y = mx + p$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0$, avec $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $p = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$.

Application en sciences économiques

Le **coût moyen** $CM(q) = C(q)/q$ admet souvent une asymptote – sa limite quand $q \rightarrow +\infty$ renseigne sur les rendements d'échelle de long terme de la firme (le coût moyen tend vers le coût marginal constant dans les modèles à coûts fixes négligeables).

Dérivabilité

Dérivée en un point

f est **dérivable** en a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe (dans $\mathbb{R}$); cette limite, notée $f'(a)$, est le **taux de variation instantané**.

Géométriquement, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la **tangente** au graphe en a :

$$T_a \equiv y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Application en sciences économiques

$f'(a)$ formalise la notion de grandeur **marginale**, omniprésente en économie : **coût marginal** $C'(q)$, **utilité marginale** $U'(x)$, **productivité marginale** $f'(K)$. C'est la notion la plus utilisée de tout ce cours.

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$	cste	0

Règles de calcul

$$(f + g)' = f' + g', (fg)' = f'g + fg', \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ et dérivation en chaîne :}$$
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

Propriétés

f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a (la réciproque est **fausse** : $f(x) = |x|$ est continue mais non dérivable en 0).

Un point où $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ (dérivées à gauche/droite distinctes) est un **point anguleux**.

Règle de l'Hospital

Si $\lim f = \lim g = 0$ (ou $\pm\infty$) et $\lim \frac{f'}{g'}$ existe, alors $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

À utiliser en dernier recours

Valable **seulement** sur les formes indéterminées $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ (les autres formes $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 ... s'y ramènent par réécriture). Toujours essayer de simplifier algébriquement d'abord.

Le théorème de Taylor

Approximation polynomiale locale

Théorème de Taylor

Si f est $(p + 1)$ fois dérivable au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x - a)^p + R_p(x),$$

où R_p (le reste) est négligeable au voisinage de a .

Intuition

Taylor dit qu'**au voisinage d'un point**, toute fonction suffisamment régulière ressemble à un polynôme. À l'ordre 1, c'est exactement l'approximation par la tangente; les ordres supérieurs affinent l'approximation.

Application en sciences économiques

L'**approximation au premier ordre** ($\Delta f \approx f'(a) \Delta x$) est le fondement du raisonnement « marginal » standard en économie : une petite variation de prix ou de quantité produit un effet approximé par la dérivée. L'ordre 2 apparaît dans l'analyse de l'**aversion au risque** (concavité de l'utilité).

Monotonie, concavité, convexité

Lien avec la dérivée

Si f est dérivable dans un intervalle D :

$$f \text{ croissante dans } D \iff \forall x \in D : f'(x) \geq 0, \quad f \text{ décroissante} \iff f'(x) \leq 0.$$

Application en sciences économiques

La quantité demandée est (généralement) **décroissante** en le prix ($D'(p) \leq 0$), la quantité offerte **croissante** ($O'(p) \geq 0$) – l'existence même d'un équilibre de marché unique repose sur ces propriétés de monotonie.

Définitions

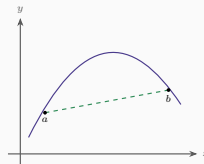
f est **concave** dans D (convexe) si :

$$\forall x, y \in D, \forall \lambda \in [0, 1] :$$

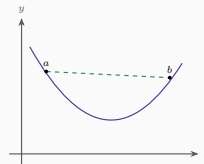
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq (\leq) \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Si f est deux fois dérivable : f concave $\iff f'' \leq 0$;

f convexe $\iff f'' \geq 0$.



Concave



Convexe

Lecture graphique

Concave = le graphe est **sous** ses cordes (courbé « vers le bas », comme une fonction de production à rendements décroissants). Convexe = **au-dessus** de ses cordes.

Application en sciences économiques

Une fonction de **production** à un facteur est typiquement concave (rendements marginaux décroissants); une fonction d'**utilité** concave traduit l'**aversion au risque** de l'agent. Cette notion, essentielle pour caractériser un optimum global, sera au cœur du chapitre 3.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 2

- **Limite** : comportement local; existe $\iff$ limites à gauche et à droite coïncident.
- **Continuité** : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; le théorème de Brouwer garantit l'existence de points fixes (équilibres).
- **Dérivée** $f'(a)$ = pente de la tangente = grandeur **marginale**; dérivable $\Rightarrow$ continue.
- **Taylor** : approximation polynomiale locale; **concavité/convexité** : signe de f'' .

Vers le chapitre 3

Ces outils — dérivée première, dérivée seconde, concavité — sont exactement ceux dont nous avons besoin pour répondre à la question centrale de la gestion : **où se situe l'optimum** d'une fonction ?