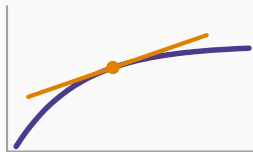


Analyse mathématique

Chapitre 4 : Fonctions de plusieurs variables



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Plan du chapitre

Avant de commencer

Domaine, graphe et courbes de niveau

Limites et continuité

Dérivées partielles et élasticités

Différentiabilité et plan tangent

Fonctions homogènes

Dérivées d'ordre supérieur et matrice hessienne

Fonctions concaves et convexes

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Une décision économique dépend presque toujours de **plusieurs** variables : quantités de plusieurs biens, capital **et** travail, prix **et** revenu. Ce chapitre étend limite, continuité et dérivée au cas $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, avant l'optimisation du chapitre 5.

Domaine, graphe et courbes de niveau

Définitions

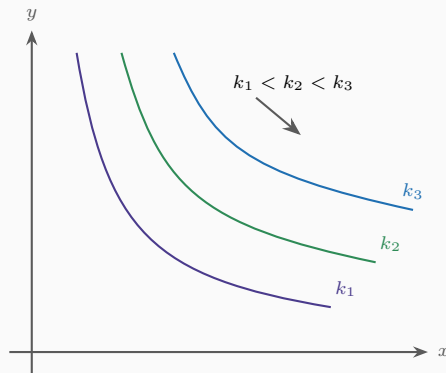
$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, associe à $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ un unique réel $f(x)$. Pour $n = 2$, le graphe $z = f(x, y)$ est une surface de $\mathbb{R}^3$.

Exemples d'applications à la gestion

- **Utilité** : $U = f(x_1, \dots, x_n)$, quantités consommées de n biens;
- **Production** : $P = f(K, W)$, capital et travail (fonction de Cobb-Douglas $f(K, W) = K^\alpha W^\beta$);
- **Coût** : dépend du format, du volume, des matières premières, etc.

Définition

La **courbe de niveau** k de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$) est la courbe plane d'équation $f(x, y) = k$ – une « tranche horizontale » du graphe, comme les courbes d'altitude d'une carte.



Application en sciences économiques

Pour une Cobb-Douglas $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$, les courbes de niveau sont les **isoquantes** (combinaisons de facteurs produisant un même niveau k). Pour $f(\mu, \sigma) = \mu - \alpha\sigma^2$ (utilité espérance-variance), ce sont les **courbes d'indifférence** d'un investisseur averse au risque.

Limites et continuité

Une subtilité : une infinité de directions

La difficulté propre à $n \geq 2$

Dans $\mathbb{R}$, on approche un point par la gauche ou par la droite : deux directions. Dans $\mathbb{R}^2$, il existe une **infinité de chemins** menant à un point. La limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ n'existe que si **tous** les chemins donnent la même valeur.

Exemple : une limite qui n'existe pas

$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Le long de $y = 0$: $f(x, 0) = 1 \rightarrow 1$. Le long de $x = 0$: $f(0, y) = -1 \rightarrow -1$.

Les deux limites diffèrent $\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

Astuce pratique

Pour $n = 2$, passer en **coordonnées polaires** $x = a_1 + \rho \cos \theta$, $y = a_2 + \rho \sin \theta$ ramène souvent le calcul à une limite en $\rho \rightarrow 0$ d'une fonction d'une seule variable (avec θ comme paramètre à surveiller).

Définition

f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (limite au sens ci-dessus). Les fonctions élémentaires (polynômes, exponentielle, logarithme...) et leurs sommes/produits/composées sont continues sur leur domaine, exactement comme pour une variable.

Dérivées partielles et élasticités

Dériver « toutes choses égales par ailleurs »

Dérivée partielle

La **dérivée partielle** de f par rapport à x_i en a est

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a)}{h}$$

— on dérive comme une fonction d'une seule variable, **en gelant** toutes les autres.

Exemple

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y. \quad \text{En } (2, 1) : \frac{\partial f}{\partial x} = 16, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 8.$$

Application en sciences économiques

$\frac{\partial f}{\partial K}$ = productivité marginale du capital, $\frac{\partial f}{\partial W}$ = productivité marginale du travail; $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ = utilité marginale du bien i . Ce sont les grandeurs marginales du chapitre 2, généralisées quand plusieurs variables sont en jeu.

Définition

L'**élasticité** de f par rapport à x_i en a (avec $a_i \neq 0$, $f(a) \neq 0$) est

$$E_f^i(a) = \frac{a_i}{f(a)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_i}(a)$$

— la variation **relative** de f pour 1 % de variation relative de x_i .

Application en sciences économiques

Pour une demande $Q(p_1, p_2, p_3, R)$, l'élasticité $E_Q^{p_2} > 0$ signale des biens **substituts**, $E_Q^{p_3} < 0$ des biens **complémentaires** — la lecture du signe des élasticités croisées est un résultat de base en microéconomie de la consommation.

Différentiabilité et plan tangent

Différentiabilité

f est **différentiable** en a s'il existe une approximation linéaire de f au voisinage de a :

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + df_a(\Delta x), \quad df_a(\Delta x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i = \nabla f(a) \cdot dx,$$

où $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ est le **gradient** de f en a .

Attention : plus fort que la dérivabilité

Contrairement au cas $n = 1$, l'**existence des dérivées partielles n'entraîne pas** la différentiabilité (ni même la continuité!) quand $n \geq 2$. La différentiabilité doit se vérifier séparément — c'est elle qui garantit l'existence d'un (hyper)plan tangent $\Pi_a \equiv z = f(a) + df_a(x - a)$.

Chain rule

Si $y = f(x)$ est différentiable et $x = x(t)$ l'est aussi, alors $\frac{d}{dt}f(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$.

Application en sciences économiques

Consommateur sous contrainte de budget $p_x x + p_y y = R$: en substituant $y = f(x) = \frac{R - p_x x}{p_y}$

dans $U(x, y)$, la *chain rule* donne $\frac{dV}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{p_x}{p_y}$ — l'expression qui, égale à zéro, produira au chapitre 5 la condition de tangence budget/préférences.

Fonctions homogènes

Rendements d'échelle et formule d'Euler

Définition et théorème

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est **homogène de degré k** si $\forall \lambda > 0 : f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$.

Formule d'Euler : si f est homogène de degré k et différentiable, $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k f(x)$.

Exemple : Cobb-Douglas

$f(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ est homogène de degré 1 (rendements d'échelle **constants**) :

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$. La formule d'Euler donne $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)$.

Application en sciences économiques

Sous rendements constants, la formule d'Euler dit que payer chaque facteur à sa **productivité marginale** épuise **exactement** la production totale — un résultat fondamental de la théorie de la répartition. Le **degré d'homogénéité** ($k < 1, = 1, > 1$) classe les rendements d'échelle décroissants, constants, croissants.

Dérivées d'ordre supérieur et matrice hessienne

La généralisation de f''

Matrice hessienne

Les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ forment la matrice hessienne $Hf(a)$, de taille $n \times n$.

Théorème de Schwarz : si $f \in C^2(D)$, $Hf(a)$ est symétrique ($\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$).

Exemple

$$f(x, y) = x^2y + xy^3 : Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 3y^2 \\ 2x + 3y^2 & 6xy \end{pmatrix}, \text{ bien symétrique.}$$

Pourquoi c'est essentiel

La matrice hessienne est à l'optimisation à plusieurs variables (chapitre 5) ce que f'' est à l'optimisation à une variable (chapitre 3) : son **signe** (via ses valeurs propres) tranchera entre maximum, minimum et point-selle.

Fonctions concaves et convexes

Définitions et propriété

f est **concave** dans D (convexe) si $\forall a, b \in D, \forall t \in [0, 1]$:

$$f((1-t)a + tb) \geq (\leq) (1-t)f(a) + tf(b).$$

Si $f \in C^2(D)$, D ouvert convexe :

f concave $\iff Hf(x)$ semi-définie négative $\forall x \in D$, f convexe $\iff Hf(x)$ semi-définie positive.

Comment vérifier le signe d'une hessienne 2×2

Pour $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: semi-définie négative $\iff f_{xx} \leq 0, f_{yy} \leq 0$ et

$\det Hf = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \geq 0$ (critère des mineurs, repris en détail au chapitre 5).

Application en sciences économiques

La **concavité** d'une fonction de production (rendements marginaux décroissants dans chaque facteur, et effets croisés « raisonnables ») et d'une fonction d'utilité (aversion au risque multivariée) sont les hypothèses qui garantiront, au chapitre 5, que la condition du premier ordre suffit à caractériser un optimum **global**.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 4

- **Courbes de niveau** : isoquantes, courbes d'indifférence.
- **Limite** : doit coïncider le long de **tous** les chemins.
- **Dérivée partielle** $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ = grandeur marginale; **gradient** ∇f = vecteur des dérivées partielles.
- **Différentiabilité** $\neq$ simple existence des dérivées partielles.
- **Homogénéité** : formule d'Euler, rendements d'échelle.
- **Hessienne** Hf : généralise f'' ; son signe caractérise concavité/convexité.

Vers le chapitre 5

Tous les outils sont réunis : gradient et hessienne vont nous permettre de généraliser, à plusieurs variables **et sous contrainte**, la théorie de l'optimisation du chapitre 3.