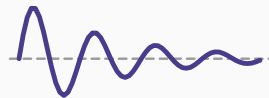


# Analyse dynamique des modèles économiques

## Chapitre 2 : Le vocabulaire commun



---

Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Six mots, un seul sens

L'ordre

La linéarité

L'autonomie

Résoudre : ce que cela veut dire

L'état stationnaire

Ce qu'il faut retenir

Six mots, un seul sens

---

### Un chapitre de langue, pas de calcul

Les six notions qui suivent — ordre, linéarité, coefficients constants, autonomie, solution générale, état stationnaire — ont **exactement le même sens** en temps discret et en temps continu.

C'est ce qui rend le face à face possible : une seule grammaire pour deux langages. Chaque définition est donc donnée une fois, avec ses deux traductions côte à côte.

L'ordre

---

## Ordre d'une équation dynamique

L'**ordre** est le nombre de périodes, ou le rang de dérivation, dont il faut disposer pour déterminer la suite du mouvement.

| Ordre | Temps discret               | Temps continu              |
|-------|-----------------------------|----------------------------|
| 1     | $y_{t+1} = f(y_t)$          | $\dot{y} = f(y)$           |
| 2     | $y_{t+2} = f(y_{t+1}, y_t)$ | $\ddot{y} = f(\dot{y}, y)$ |
| $n$   | $n$ retards                 | dérivée $n$ -ième          |

### Comment le lire

En temps discret, l'ordre est l'**écart** entre l'indice le plus grand et le plus petit. Dans  $y_{t+2} = 3y_{t+1} - 2y_t$ , l'écart va de  $t$  à  $t + 2$  : ordre 2.

En temps continu, l'ordre est celui de la **plus haute dérivée** présente.

## Ordre et conditions initiales

Une équation d'ordre  $n$  exige  $n$  **conditions** pour que la trajectoire soit unique.

- Ordre 1 : la seule donnée de  $y_0$  suffit.
- Ordre 2 : il faut  $y_0$  **et**  $y_1$  en discret;  $y(0)$  **et**  $\dot{y}(0)$  en continu.

## Pourquoi l'économie a besoin de l'ordre 2

L'ordre 1 dit : l'état de demain dépend de l'état d'aujourd'hui. C'est un modèle sans mémoire longue.

L'ordre 2 dit : il dépend aussi de la **vitesse** à laquelle on y est arrivé. C'est précisément ce que fait l'accélérateur d'investissement — les entreprises investissent en fonction de la **variation** de la demande, pas de son niveau. D'où le modèle de Samuelson, au chapitre 11.



## La linéarité

---

### Équation linéaire

L'équation est **linéaire** si la grandeur et ses retards ou dérivées n'apparaissent qu'à la puissance 1, sans produit entre eux, ni racine, ni logarithme, ni exponentielle.

Linéaire

$$y_{t+1} = 0,8 y_t + 5$$

$$\dot{y} = -0,5 y + 4$$

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$$

Non linéaire

$$y_{t+1} = 3 y_t (1 - y_t)$$

$$\dot{y} = r y \left( 1 - \frac{y}{K} \right)$$

$$\ddot{y} + y^2 = 0$$

### Pourquoi la distinction gouverne tout le cours

Une équation **linéaire** se résout : on dispose d'une formule explicite qui donne  $y_t$  ou  $y(t)$  en fonction de  $t$ .

Une équation **non linéaire** ne se résout presque jamais. On ne peut alors qu'étudier ses équilibres et leur stabilité — c'est l'objet du chapitre 10.

Les chapitres 3 à 9 traitent le cas linéaire, parce que c'est le seul où l'on obtient des réponses complètes.

## Coefficients constants ou variables

$$\underbrace{y_{t+1} = a y_t + b}_{\text{coefficients constants}}$$

$$\underbrace{y_{t+1} = a_t y_t + b_t}_{\text{coefficients variables}}$$

Même distinction en continu :  $\dot{y} = a y + b$  contre  $\dot{y} = a(t) y + b(t)$ .

## Ce que « constant » veut dire en économie

Coefficients constants : le mécanisme est le **même à toutes les dates**. Un taux d'intérêt fixe, une propension à consommer stable.

Coefficients variables : le mécanisme lui-même change. Un taux indexé, une politique révisée chaque année, un salaire soumis à une grille évolutive.

L'essentiel du cours suppose les coefficients constants. Le chapitre 6 lève cette hypothèse.

## L'autonomie

---

## Équation autonome

Une équation est **autonome** si le temps n'y figure pas explicitement — seulement à travers la grandeur elle-même.

$$\dot{y} = f(y) \quad \text{autonome} \qquad \dot{y} = f(y, t) \quad \text{non autonome}$$

## L'image de la règle du jeu

Autonome : la règle est **la même hier, aujourd'hui et demain**. Seul l'état change. Deux trajectoires parties du même point à des dates différentes se superposent, simplement décalées.

Non autonome : la règle elle-même dépend du calendrier. Partir de  $y = 10$  en janvier n'est pas partir de  $y = 10$  en juillet.

### Trois équations

| Équation                           | Autonome ?                              |
|------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\dot{y} = 0,05 y$                 | oui                                     |
| $\dot{y} = 0,05 y + 100$           | oui — la constante ne dépend pas de $t$ |
| $\dot{y} = 0,05 y + 100 e^{0,02t}$ | non                                     |

### Pourquoi cela compte

Les diagrammes de phase du chapitre 5 et les portraits du chapitre 9 **n'existent que pour les équations autonomes** : le temps n'y figure pas, ce qui permet justement de le faire disparaître du dessin.

Presque tous les modèles économiques classiques sont autonomes. Ceux qui ne le sont pas — croissance de la population imposée de l'extérieur, choc pétrolier daté — se ramènent souvent à un cas autonome en ajoutant une variable.



Résoudre : ce que cela veut dire

---

## Les deux mots

- La **solution générale** est la famille de toutes les trajectoires compatibles avec l'équation. Elle contient autant de constantes arbitraires que l'ordre de l'équation.
- La **solution particulière** est celle qui vérifie en outre les conditions initiales. Elle est unique.

## Sur l'exemple le plus simple

$$y_{t+1} = 0,8 y_t \implies y_t = C \times 0,8^t \qquad \dot{y} = -0,22 y \implies y(t) = C e^{-0,22t}$$

Dans les deux cas, une constante  $C$  : l'ordre est 1.

Avec  $y_0 = 50$  :  $C = 50$  des deux côtés. On obtient  $y_t = 50 \times 0,8^t$  et  $y(t) = 50 e^{-0,22t}$ .

### La lecture économique

La solution générale décrit **le mécanisme** : ce que le modèle autorise.

La solution particulière décrit **l'histoire** : ce qui se produit effectivement, étant donné le point de départ.

Un modèle sans condition initiale ne prédit rien. C'est pourquoi tout exercice commence par « sachant que  $y_0 = \dots$  ».

## L'état stationnaire

---

## État stationnaire (ou point fixe, ou équilibre de long terme)

C'est la valeur  $y^*$  que la grandeur, une fois atteinte, **ne quitte plus**.

---

Temps discret

---

Temps continu

---

$$y^* = f(y^*)$$

---

$$f(y^*) = 0$$

---

l'état se **reproduit**

---

la vitesse s'**annule**

### Le calcul, dans les deux langages

Discret.  $y_{t+1} = a y_t + b$ . On pose  $y^* = a y^* + b$ , d'où

$$y^*(1 - a) = b \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^* = \frac{b}{1 - a}} \quad (a \neq 1)$$

Continu.  $\dot{y} = a y + b$ . On pose  $a y^* + b = 0$ , d'où

$$\boxed{y^* = -\frac{b}{a}} \quad (a \neq 0)$$

### Deux formules différentes, une même idée

Les expressions ne se ressemblent pas  $-1 - a$  d'un côté,  $-a$  de l'autre. C'est normal : le rôle de  $a$  n'est pas le même. En discret,  $a$  **multiplie** l'état; en continu, il multiplie la **vitesse**.

La correspondance exacte est  $a_{\text{discret}} \leftrightarrow 1 + a_{\text{continu}}$ , et l'on retrouve alors la même formule. Cette translation de  $1$  explique aussi pourquoi le seuil de stabilité sera  $|a| < 1$  d'un côté et  $a < 0$  de l'autre.

## Un exemple économique

### Le revenu national avec multiplicateur

$Y_{t+1} = c Y_t + I$ , où  $c = 0,8$  est la propension à consommer et  $I = 200$  l'investissement autonome.

$$Y^* = \frac{200}{1 - 0,8} = 1000$$

Le facteur  $\frac{1}{1 - c} = 5$  est le **multiplicateur keynésien**. Il apparaît ici comme un simple état stationnaire — et l'on voit du même coup ce que le calcul statique du multiplicateur laisse de côté : le **temps** que met l'économie à l'atteindre.

### Deux questions distinctes, à ne jamais confondre

1. **Où va-t-on ?** C'est l'état stationnaire. Il se calcule en une ligne.
2. **Y va-t-on vraiment, et comment ?** C'est la **stabilité**, et c'est bien plus difficile.

Un état stationnaire peut parfaitement exister sans être jamais atteint. Toute la partie II est consacrée à la seconde question.



Ce qu'il faut retenir

---

## Six définitions

1. **Ordre** : nombre de retards, ou rang de la plus haute dérivée. Il fixe le nombre de conditions initiales.
2. **Linéaire** : puissance 1, sans produit. Seul cas où l'on obtient une formule explicite.
3. **Coefficients constants** : le mécanisme ne change pas de date en date.
4. **Autonome** : le temps ne figure pas explicitement. Condition d'existence des diagrammes de phase.
5. **Solution générale** (avec constantes) contre **solution particulière** (fixée par les conditions initiales).
6. **État stationnaire** :  $y^* = f(y^*)$  en discret,  $f(y^*) = 0$  en continu.

## La suite

Le vocabulaire est posé, et il est commun. La partie II attaque le cas le plus simple et le plus utile : l'ordre 1 linéaire à coefficients constants, résolu dans les deux langages au chapitre 3.