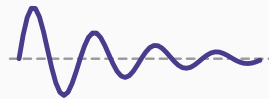


Analyse dynamique des modèles économiques

Chapitre 9 : Les systèmes de deux variables



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Pourquoi les systèmes

Les valeurs propres

Le critère de stabilité

Les portraits de phase

Un modèle complet

Ce qu'il faut retenir

Pourquoi les systèmes

Deux raisons, l'une théorique, l'autre pratique

Raison économique : les modèles ont plusieurs variables

Un modèle de croissance suit le capital **et** le travail. Un modèle de conjoncture suit le revenu **et** le taux d'intérêt. Un modèle proies-prédateurs suit deux populations.

Ces grandeurs s'influencent mutuellement : on ne peut pas les traiter séparément.

Raison mathématique : tout ordre 2 est un système

$y_{t+2} = a_1 y_{t+1} + a_2 y_t$ se réécrit, en posant $z_t = y_{t+1}$:

$$\begin{cases} y_{t+1} = z_t \\ z_{t+1} = a_1 z_t + a_2 y_t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

La conséquence

Le chapitre 9 **contient** les chapitres 7 et 8 comme cas particuliers. Ce qu'on va établir pour les systèmes redonnera exactement l'équation caractéristique et les conditions de stabilité de l'ordre 2.

C'est le point de vue le plus général du cours.

Le face à face

$$\text{Discret : } Y_{t+1} = A Y_t$$

$$\text{Continu : } \dot{Y} = A Y$$

avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ et A une matrice carrée de taille 2.

La ressemblance avec l'ordre 1

Comparez à $y_{t+1} = a y_t$ et $\dot{y} = a y$. La seule différence est que le nombre a est devenu une matrice A .

Toute la théorie qui suit consiste à donner un sens matriciel aux objets du chapitre 3 : que devient a^t ? que devient e^{at} ? que devient la condition $|a| < 1$?

Les valeurs propres

Le nombre qui remplace a

Valeur propre

λ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur V non nul tel que

$$A V = \lambda V$$

Sur ce vecteur, la matrice agit **comme un simple nombre**.

Comment les calculer

Les valeurs propres sont les racines de

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Pour une matrice 2×2 , cela donne

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \lambda + \det(A) = 0$$

où $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ est la **trace**.

Encore un trinôme

Comme au chapitre 7, tout se ramène à une équation du second degré. Les deux coefficients sont maintenant la trace et le déterminant — deux nombres qui se lisent directement sur la matrice, sans aucun calcul.

C'est ce qui rend l'analyse des systèmes 2×2 si commode.

Le résultat, dans les deux langages

Si A possède deux valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 de vecteurs propres V_1, V_2 :

Discret

Continu

$$Y_t = C_1 \lambda_1^t V_1 + C_2 \lambda_2^t V_2$$

$$Y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

La même formule qu'à l'ordre 2

Comparez au chapitre 7 : $C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t$.

Seuls les vecteurs propres sont nouveaux. Ils disent dans quelle *direction* du plan chaque mode agit ; les valeurs propres disent à quelle *vitesse*.

Un calcul complet, en continu

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\text{tr}(A) = -5$, $\det(A) = 6 - 2 = 4$. Caractéristique : $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$.

$\Delta = 25 - 16 = 9$, donc $\lambda = \frac{-5 \pm 3}{2}$: $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -4$.

Les deux parties réelles sont négatives : **système stable**.

Le critère de stabilité

Le critère, inchangé depuis le chapitre 4

Discret

Continu

toutes les valeurs propres de **module** < 1

toutes de **partie réelle** < 0

Sur la trace et le déterminant

Temps continu, pour une matrice 2×2 :

$$\text{tr}(A) < 0 \quad \text{et} \quad \det(A) > 0$$

Temps discret :

$$|\det(A)| < 1 \quad \text{et} \quad |\text{tr}(A)| < 1 + \det(A)$$

Deux nombres suffisent

Aucun besoin de calculer les valeurs propres : la trace et le déterminant se lisent sur la matrice.

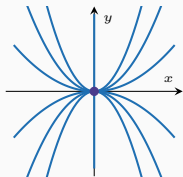
Et l'on retrouve bien le chapitre 8 : pour la matrice compagnon de l'ordre 2, $\text{tr}(A) = a_1$ et $\det(A) = -a_2$, et les inégalités ci-dessus **sont** les conditions de Schur.

Les portraits de phase

Les quatre comportements

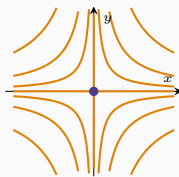
nœud stable

$$\lambda_1, \lambda_2 < 0$$



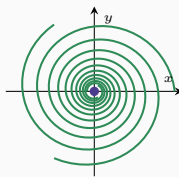
col (point selle)

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$



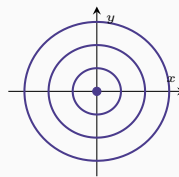
foyer stable

$$\text{complexes, } \text{Re} < 0$$



centre

$$\text{complexes, } \text{Re} = 0$$



les quatre comportements d'un système linéaire de dimension deux, lus sur les **valeurs propres**

Selon les valeurs propres, en temps continu

Valeurs propres	Nom	Comportement
réelles, même signe négatif	nœud stable	tout converge
réelles, même signe positif	nœud instable	tout diverge
réelles, signes opposés	col (point selle)	converge dans une direction, diverge dans l'autre
complexes, partie réelle < 0	foyer stable	spirale rentrante
complexes, partie réelle > 0	foyer instable	spirale sortante
complexes, partie réelle nulle	centre	orbites fermées

Le col mérite une mention spéciale

Un col est instable — sauf pour les trajectoires qui partent exactement sur la **direction stable**, la droite portée par le vecteur propre associé à $\lambda < 0$. Celles-là convergent; toutes les autres finissent par s'échapper.

Cette direction stable porte un nom en économie : le **sentier de selle**.

Pourquoi le sentier de selle est partout en macroéconomie

Dans les modèles à anticipations rationnelles — Ramsey, Dornbusch, la plupart des modèles monétaires — l'équilibre est un **col**.

L'interprétation est la suivante : le capital est prédéterminé, mais la consommation ou le taux de change est une variable de saut. Les agents la choisissent **précisément** de manière à se placer sur le sentier de selle, car toute autre valeur conduirait à une trajectoire explosive, incompatible avec la rationalité.

C'est ainsi que l'instabilité mathématique devient un **argument de détermination économique**. Un résultat que l'on ne peut pas comprendre sans le portrait de phase.

Un modèle complet

Deux secteurs qui s'influencent

Deux régions dont les revenus y et z s'entraînent mutuellement, avec un ajustement propre :

$$\begin{cases} \dot{y} = -3y + z \\ \dot{z} = 2y - 2z \end{cases}$$

C'est la matrice de l'exemple précédent, de valeurs propres -1 et -4 .

Les directions propres

Pour $\lambda_1 = -1$: $(A + I)V = 0$ donne $-2v_1 + v_2 = 0$, soit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = -4$: $(A + 4I)V = 0$ donne $v_1 + v_2 = 0$, soit $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$Y(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La lecture

Deux valeurs propres négatives : **nœud stable**, les deux régions convergent vers l'équilibre.

Mais elles n'y convergent pas de la même façon. Le mode rapide (e^{-4t} , direction $(1; -1)$) est celui où les deux revenus s'écartent **en sens contraire** : les déséquilibres entre régions se résorbent vite.

Le mode lent (e^{-t} , direction $(1; 2)$) est celui où les deux évoluent **dans le même sens** : un choc commun met quatre fois plus de temps à s'effacer.

Les vecteurs propres disent quelle combinaison de variables s'ajuste vite et laquelle s'ajuste lentement. C'est l'information la plus utile que fournisse l'analyse spectrale d'un modèle.

Ce qu'il faut retenir

Le résumé du chapitre

Six points

1. Toute équation d'ordre n se réécrit comme un **système** de n équations d'ordre 1.
2. $Y_{t+1} = A Y_t$ et $\dot{Y} = A Y$: le nombre a est devenu une matrice.
3. Les **valeurs propres** remplacent a ; elles sont racines de $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$.
4. Critère de stabilité inchangé : module < 1 en discret, partie réelle < 0 en continu — et il se lit sur la trace et le déterminant.
5. Quatre portraits : **nœud**, **col**, **foyer**, **centre**.
6. Le **col** et son sentier de selle sont la structure de presque tous les modèles à anticipations rationnelles.

La suite

Tout ce qui précède suppose la **linéarité**. Or aucun modèle économique sérieux n'est linéaire : la production a des rendements décroissants, les populations saturent, les prix ne peuvent pas être négatifs.

La partie IV aborde le non linéaire — et c'est là que le temps discret révèle son comportement le plus spectaculaire.