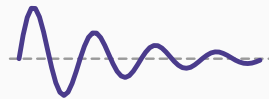


Analyse dynamique des modèles économiques

Chapitre 8 : La stabilité à l'ordre 2



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Le critère général

Le critère sur les coefficients

Les quatre régimes

Application : le modèle de Samuelson

Ce qu'il faut retenir

Le critère général

Le critère de stabilité, à tout ordre

Temps discret

toutes les racines de module < 1
 $|\lambda_i| < 1$

Temps continu

toutes les racines de partie réelle < 0
 $\text{Re}(\lambda_i) < 0$

Pourquoi « toutes »

La solution générale est une somme : $C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t$. Elle tend vers zéro si et seulement si **chaque** terme y tend.

Une seule racine hors du domaine suffit à faire diverger la trajectoire — sauf si la constante correspondante est nulle, cas exceptionnel qui ne survit à aucune perturbation.

Une seule racine mauvaise, et tout le modèle est instable.

La racine dominante

En pratique, on ne regarde que la racine de **plus grand module** (discret) ou de **plus grande partie réelle** (continu) : c'est elle qui gouverne le long terme.

C'est aussi elle qui fixe la vitesse de convergence, donc la demi-vie du chapitre 4.

Le critère sur les coefficients

Éviter de calculer les racines

Le problème pratique

Calculer les racines demande un discriminant, une racine carrée, éventuellement des complexes. C'est lourd — surtout si l'on veut savoir comment la stabilité **dépend des paramètres économiques**.

On préfère donc des conditions portant **directement sur a_1 et a_2** . C'est possible, et le résultat est remarquablement simple.

Temps discret : les conditions de Schur

Pour $y_{t+2} = a_1 y_{t+1} + a_2 y_t$, toutes les racines sont de module inférieur à 1 si et seulement si

$$\begin{cases} a_2 < 1 - a_1 \\ a_2 < 1 + a_1 \\ a_2 > -1 \end{cases}$$

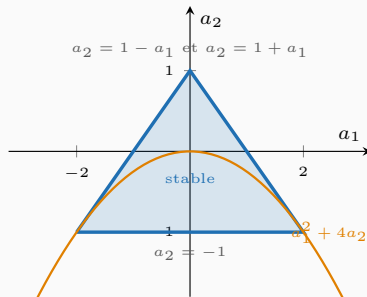
Temps continu : les conditions de Routh

Pour $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = 0$, toutes les racines sont de partie réelle négative si et seulement si

$$a_1 > 0 \quad \text{et} \quad a_2 > 0$$

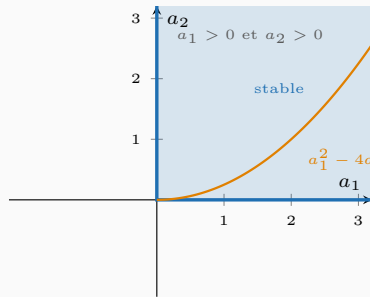
temps discret : $y_{t+2} = a_1 y_{t+1} + a_2 y_t$

le *triangle* de stabilité



temps continu : $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

un simple *quart de plan*



de part et d'autre de la courbe orange, les racines passent de **réelles** à **complexes** :
la trajectoire cesse d'être monotone et se met à osciller

La comparaison

	Discret	Continu
Région stable	un triangle	un quart de plan
Sommets	$(-2; -1)$, $(2; -1)$, $(0; 1)$	l'origine
Frontières	trois droites	deux demi-droites
Aire	finie	infinie

Ce que dit la finitude de l'aire

En temps discret, la région stable est **bornée** : au-delà d'une certaine intensité de réaction, quels que soient les signes, le système explose.

En temps continu, il suffit que les deux coefficients soient positifs, **aussi grands soient-ils**. Un amortissement très fort ne déstabilise jamais un système continu ; il peut déstabiliser un système discret.

Traduit en économie : **une politique de stabilisation trop vigoureuse peut déstabiliser une économie qui réagit avec retard**. C'est un résultat classique de la théorie du contrôle, et il tient tout entier dans la forme de ces deux figures.

Où passe-t-on du monotone à l'oscillant

	Discret	Continu
Discriminant	$\Delta = a_1^2 + 4a_2$	$\Delta = a_1^2 - 4a_2$
Racines complexes si	$a_2 < -\frac{a_1^2}{4}$	$a_2 > \frac{a_1^2}{4}$
Position	sous la parabole	au-dessus de la parabole

Attention au piège

Les deux paraboles sont symétriques l'une de l'autre, et les inégalités sont **inversées**. C'est une conséquence directe de la convention d'écriture du chapitre 7 : coefficients à droite en discret, à gauche en continu.

Le moyen sûr de ne pas se tromper : **recalculer le discriminant** plutôt que retenir le sens de l'inégalité.

Les quatre régimes

Croiser stabilité et nature des racines

Le tableau à double entrée

	Racines réelles	Racines complexes
Stables	convergence monotone	oscillations amorties
Instables	explosion monotone	oscillations explosives

Quatre régimes dans les deux langages

À l'ordre 2, le temps continu **rattrape** le temps discret : il connaît lui aussi les quatre régimes, oscillations comprises.

C'est la grande différence avec le chapitre 4. Deux dérivées suffisent à produire un cycle en temps continu, là où une seule ne le permettait jamais.

La raison est la même des deux côtés : il faut au moins deux « degrés de liberté » pour qu'un système puisse dépasser sa cible et revenir.

Le cycle non amorti

Discret

$$|\lambda| = 1 \text{ exactement}$$

$$a_2 = -1$$

oscillations d'amplitude constante

Continu

$$\operatorname{Re}(\lambda) = 0 \text{ exactement}$$

$$a_1 = 0$$

oscillations d'amplitude constante

Le cycle parfait n'existe pas

Ce cas engendre un cycle qui ne s'amortit ni ne s'amplifie — le cycle économique « pur » que cherchaient les premiers théoriciens.

Mais c'est une frontière de mesure nulle : **la moindre perturbation d'un paramètre fait basculer d'un côté ou de l'autre**. Un modèle linéaire ne peut donc pas produire un cycle durable de façon robuste.

C'est l'une des raisons pour lesquelles la théorie moderne du cycle recourt soit à des chocs aléatoires répétés — voir le chapitre 12 — soit à des modèles **non linéaires** — voir le chapitre 10.

Application : le modèle de Samuelson

Multiplicateur et accélérateur, 1939

$$C_t = c Y_{t-1}, \quad I_t = v (C_t - C_{t-1}), \quad Y_t = C_t + I_t + G$$

En substituant, avec G normalisé à 1 :

$$Y_t = 1 + c(1 + v) Y_{t-1} - c v Y_{t-2}$$

Dans les notations du cours : $a_1 = c(1 + v)$ et $a_2 = -c v$.

Les conditions de stabilité, appliquées

- $a_2 > -1$ donne $c v < 1$.
- $a_2 < 1 - a_1$ donne $-c v < 1 - c - c v$, soit $c < 1$: toujours vrai.
- $a_2 < 1 + a_1$ donne $-c v < 1 + c + c v$: toujours vrai.

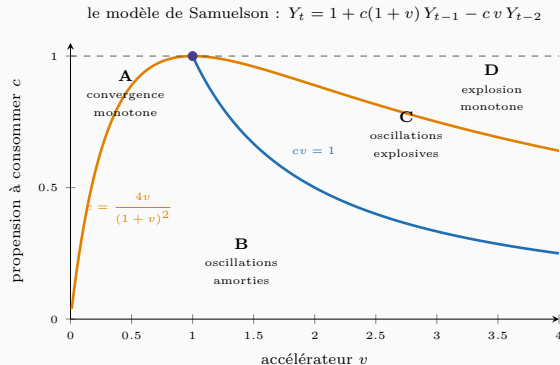
$\text{stabilité} \iff c v < 1$

Et la nature des racines

$\Delta = a_1^2 + 4a_2 = c^2(1+v)^2 - 4cv$. Les racines sont complexes si

$$c < \frac{4v}{(1+v)^2}$$

La carte des régimes



la courbe orange sépare les racines réelles des racines complexes ; la courbe bleue sépare le stable de l'instable.

Quatre régimes au lieu des deux du temps continu — et l'économie bascule de l'un à l'autre par un simple changement de paramètre.

Ce que la carte enseigne

Zone	Régime	Situation
A	convergence monotone	accélérateur faible, économie amortie
B	oscillations amorties	le cycle conjoncturel ordinaire
C	oscillations explosives	accélérateur fort, économie instable
D	explosion monotone	croissance emballée

La zone B est celle où l'économie oscille autour d'une tendance sans exploser. C'est le régime que Samuelson considérait comme représentatif — et il montre que **le cycle n'a pas besoin d'une cause extérieure** : il naît de la seule interaction entre consommation et investissement.

Le résultat qui a fait la célébrité du modèle

c et v sont deux paramètres de comportement, stables et mesurables. Or une variation modeste de v fait passer de la zone B à la zone C — c'est-à-dire d'un cycle amorti à un cycle explosif.

La frontière entre une économie qui se stabilise et une économie qui s'emballe est une simple courbe dans le plan des paramètres. C'est le premier modèle à l'avoir montré aussi clairement, et c'est pourquoi on l'enseigne encore.

Une vérification numérique

$c = 0,8$ et $v = 1$: $cv = 0,8 < 1$, stable. Et $4v/(1+v)^2 = 1 > 0,8$: racines complexes. **Zone B**, oscillations amorties.

$c = 0,8$ et $v = 2$: $cv = 1,6 > 1$, instable. Et $4v/(1+v)^2 = 8/9 = 0,889 > 0,8$: complexes. **Zone C**, oscillations explosives.

Doubler la sensibilité de l'investissement à la demande a suffi à faire basculer l'économie.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Critère universel : **toutes** les racines de module < 1 en discret, de partie réelle < 0 en continu.
2. Conditions sur les coefficients : trois inégalités (**triangle**) en discret, deux (**quart de plan**) en continu.
3. La région stable est **bornée** en discret : trop réagir déstabilise. Elle ne l'est pas en continu.
4. À l'ordre 2, les deux langages connaissent les **quatre** régimes, oscillations comprises.
5. Samuelson : stabilité $\iff cv < 1$, et quatre zones dans le plan $(v; c)$.

La suite

Une équation d'ordre 2 se réécrit comme un système de deux équations d'ordre 1. Ce changement de point de vue ouvre la porte à un nombre quelconque de variables — et c'est là que l'algèbre linéaire entre en scène.

C'est le chapitre 9.