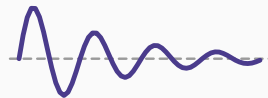


Analyse dynamique des modèles économiques

Chapitre 4 : Stabilité — là où les deux temps divergent



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

La question

Le critère

Les régimes

La vitesse de convergence

Un exercice complet

Ce qu'il faut retenir

La question

Ce qui change ici

Jusqu'à présent, le face à face n'a produit que des ressemblances : même architecture, même équilibre, mêmes formules à une traduction près.

Ce chapitre est celui où la symétrie **se brise**. Les conditions de stabilité ne sont pas les mêmes, et surtout le temps discret produit un comportement — l'oscillation d'une période à l'autre — dont le temps continu est incapable.

C'est le chapitre à comprendre si l'on n'en comprend qu'un.

La question de stabilité

L'état stationnaire y^* est **stable** si toute trajectoire partie d'un point voisin y revient :

$$y_t \longrightarrow y^* \quad \text{ou} \quad y(t) \longrightarrow y^* \quad \text{quand } t \rightarrow \infty$$

Il est **instable** dans le cas contraire.

Le critère

Rappel du chapitre 3

$$y_t - y^* = (y_0 - y^*) a^t \qquad y(t) - y^* = (y_0 - y^*) e^{at}$$

L'écart à l'équilibre est l'écart initial multiplié par un facteur. Il **converge vers zéro si et seulement si ce facteur converge vers zéro**.

Les deux critères

	Temps discret	Temps continu
Facteur	a^t	e^{at}
Stable si	$ a < 1$	$a < 0$
Instable si	$ a > 1$	$a > 0$
Cas limite	$ a = 1$	$a = 0$

Pourquoi ces deux critères ne se ressemblent pas

Une valeur absolue d'un côté, un signe de l'autre

En continu, e^{at} est **toujours positif**. Seule sa croissance ou sa décroissance importe, donc seul le **signe** de a compte.

En discret, a^t peut changer de signe à chaque pas. Ce qui décide de la convergence n'est plus le signe mais le **module** : il faut que $|a| < 1$ pour que les puissances s'écrasent.

Ce n'est pas une subtilité de notation. C'est la trace mathématique d'un phénomène économique bien réel : la **sur-réaction**.

La correspondance, rétablie

Avec $a_{\text{discret}} = e^{a_{\text{continu}}} :$

$$a_{\text{continu}} < 0 \iff 0 < a_{\text{discret}} < 1$$

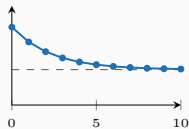
La traduction fonctionne parfaitement — **mais seulement pour a_{discret} positif**. La moitié négative de l'axe discret n'a aucun antécédent en temps continu. Tout ce chapitre est dans cette phrase.

Les régimes

Quatre en discret, deux en continu

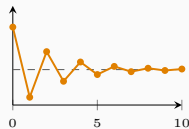
temps discret

$$0 < a < 1$$



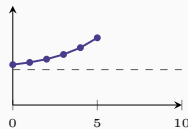
convergence directe

$$-1 < a < 0$$



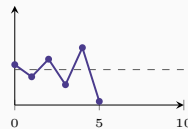
n'existe pas

$$a > 1$$



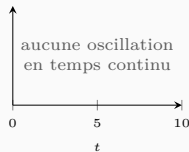
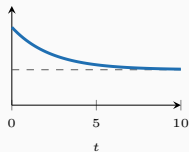
divergence directe

$$a < -1$$

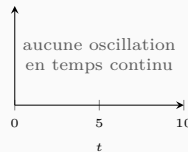
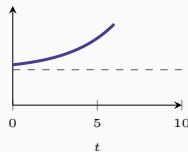


n'existe pas

temps continu



aucune oscillation
en temps continu



aucune oscillation
en temps continu

Les régimes du temps discret

Valeur de a	Comportement
$0 < a < 1$	convergence monotone
$-1 < a < 0$	convergence en oscillant
$a > 1$	divergence monotone (explosion)
$a < -1$	divergence en oscillant
$a = 1$	croissance linéaire
$a = -1$	cycle de période 2, sans amortissement

Les régimes du temps continu

Valeur de a	Comportement
$a < 0$	convergence monotone
$a > 0$	divergence monotone
$a = 0$	croissance linéaire

Le constat

Six régimes contre trois. **Les trois régimes supplémentaires sont tous des oscillations**, et ils sont propres au temps discret.

Ce que l'oscillation veut dire

La sur-réaction

α négatif signifie : un écart positif à l'équilibre engendre, à la période suivante, un écart **négatif**. Le système corrige — et corrige trop.

C'est le comportement d'un producteur agricole qui, voyant un prix élevé, plante massivement, provoque l'année suivante une surabondance et un prix effondré, plante alors trop peu, et ainsi de suite.

Ce phénomène a un nom : le **cycle du porc**, ou modèle de la toile d'araignée. Il est étudié au chapitre 11.

Pourquoi le temps continu ne peut pas le produire

En temps continu, la grandeur ne peut pas « sauter » de l'autre côté de l'équilibre : elle doit **passer par y^*** . Or si elle atteint y^* , sa vitesse y est nulle par définition, donc elle s'y arrête.

Une équation différentielle autonome d'ordre 1 **ne peut donc jamais franchir son équilibre**. Aucune oscillation n'est possible.

L'oscillation exige le **délai** : il faut que la réaction soit décidée sur une information périmée. Le temps discret contient ce délai par construction.

Résumé graphique

	Discret	Continu
Zone stable	intervalle $] -1; 1[$	demi-droite $] -\infty; 0[$
Frontière	deux points, -1 et $+1$	un point, 0
Oscillations	moitié gauche de l'intervalle	jamais

La formule mnémotechnique

Discret : module inférieur à un. Continu : partie réelle négative.

Retenez-la sous cette forme : à l'ordre 2 et pour les systèmes, elle restera vraie mot pour mot, avec λ à la place de α . C'est le seul énoncé de stabilité de tout le cours.

La vitesse de convergence

La demi-vie

La **demi-vie** est le temps au bout duquel l'écart initial est réduit de moitié.

Discret

$$\tau = \frac{\ln 0,5}{\ln |a|}$$

Continu

$$\tau = \frac{\ln 0,5}{a} = -\frac{0,693}{a}$$

Trois valeurs

a (discret)	demi-vie	interprétation
0,5	1,0 période	très rapide
0,8	3,1 périodes	rapide
0,95	13,5 périodes	lent
0,99	69 périodes	quasi permanent

Une notion qui a une portée réelle

Deux économies peuvent avoir le même équilibre de long terme et des demi-vies très différentes. La première absorbe un choc en un an, la seconde en vingt.

C'est toute la différence entre une récession et une décennie perdue. **La stabilité dit si l'on y arrive; la demi-vie dit si l'on y arrive de son vivant.**

Et l'on comprend pourquoi les macroéconomistes s'écharpent sur la valeur estimée de α : proche de 0,9 ou proche de 0,99, ce n'est pas le même monde.

Un exercice complet

Le même modèle, deux valeurs de a

Ajustement des prix sur un marché

$$p_{t+1} = a p_t + 30, \text{ avec } p_0 = 100.$$

$$\text{Équilibre : } p^* = \frac{30}{1 - a}.$$

Cas 1, $a = 0,7$: $p^* = 100$. Or $p_0 = 100$: le marché **est déjà** à l'équilibre, il y reste.

Cas 2, $a = -0,7$: $p^* = \frac{30}{1,7} = 17,6$. Écart initial 82,4.

$$p_t = 17,6 + 82,4 \times (-0,7)^t$$

$$p_1 = 17,6 - 57,7 = -40,1 - \text{négatif.}$$

Ce que ce résultat aberrant enseigne

Un prix négatif n'existe pas. Le modèle est mathématiquement correct et économiquement absurde.

C'est un rappel utile : la résolution ne dispense pas de vérifier que la trajectoire reste dans le **domaine admissible**. Une sur-réaction violente ($|a|$ proche de 1 et écart initial important) sort du domaine dès la première période.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Stabilité discrète : $|a| < 1$. Stabilité continue : $a < 0$. **Module contre partie réelle.**
2. Le temps discret a **six** régimes, le temps continu **trois** : les trois de plus sont des oscillations.
3. Une équation différentielle autonome d'ordre 1 **ne peut jamais osciller** : elle ne peut pas franchir son équilibre.
4. L'oscillation naît du **délai** de réaction, que le temps discret contient par construction.
5. La **demi-vie** chiffre la vitesse de retour à l'équilibre, et c'est souvent ce qui intéresse le décideur.

La suite

Ces résultats se lisent aussi, et beaucoup mieux, sur un dessin. Le chapitre 5 présente les deux outils graphiques du cours : le **diagramme en escalier** et le **diagramme de phase**.