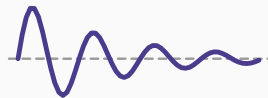


Chapitre 7 : L'ordre 2 et l'équation caractéristique



Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Pourquoi deux retards

L'équation caractéristique

Les trois cas

Caler les constantes

Ce qu'il faut retenir

Pourquoi deux retards

Ce que l'ordre 1 ne sait pas faire

L'accélérateur d'investissement

Les entreprises n'investissent pas en fonction du **niveau** de la demande, mais de sa **variation** :

$$I_t = v (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

Cette seule ligne fait apparaître deux retards. Dès qu'un modèle contient une réaction à une **variation**, il est d'ordre 2.

Et ce que cela apporte

L'ordre 1 en temps continu ne peut pas osciller; l'ordre 1 en temps discret n'oscille que d'une période sur l'autre — une alternance mécanique, de période exactement 2.

L'ordre 2 apporte des **cycles de période quelconque**, dans les deux langages. C'est le premier niveau où le temps continu sait produire des oscillations, et c'est pourquoi tous les modèles de cycle économique sont d'ordre 2 au minimum.

Le face à face

$$\text{Discret : } y_{t+2} = a_1 y_{t+1} + a_2 y_t + b$$

$$\text{Continu : } \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b$$

Deux conditions initiales sont nécessaires : y_0 et y_1 en discret, $y(0)$ et $\dot{y}(0)$ en continu.

Attention aux signes

Par tradition, l'équation discrète s'écrit avec les coefficients **à droite** et l'équation continue avec les coefficients **à gauche**. Les signes ne se correspondent donc pas terme à terme.

Ce n'est pas une coquetterie : c'est ce qui donne au triangle de stabilité du chapitre 8 sa forme habituelle. Retenez l'écriture, pas la correspondance des signes.

L'équation caractéristique

Chercher une solution exponentielle

	On essaie	On obtient
Discret	$y_t = \lambda^t$	$\lambda^2 = a_1 \lambda + a_2$
Continu	$y(t) = e^{\lambda t}$	$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

La dérivation, en discret

On injecte $y_t = \lambda^t$ dans $y_{t+2} = a_1 y_{t+1} + a_2 y_t$:

$$\lambda^{t+2} = a_1 \lambda^{t+1} + a_2 \lambda^t$$

On divise par λ^t (non nul) :

$$\lambda^2 - a_1 \lambda - a_2 = 0$$

La même idée dans les deux langages (suite)

La dérivation, en continu

On injecte $y = e^{\lambda t}$, dont les dérivées sont $\lambda e^{\lambda t}$ et $\lambda^2 e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_2 e^{\lambda t} = 0$$

On divise par $e^{\lambda t}$ (jamais nul) :

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

Le point commun, essentiel

Dans les deux cas, **résoudre une équation dynamique d'ordre 2 revient à résoudre un trinôme du second degré.**

Toute la difficulté est ramenée à un calcul de discriminant, que vous savez faire depuis le lycée. C'est cette réduction qui rend l'ordre 2 accessible.

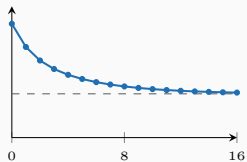
Les trois cas

Selon le discriminant

temps discret

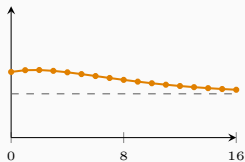
racines réelles distinctes

$$|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$$



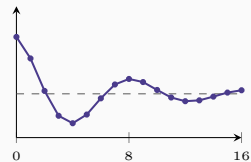
racine double

$$\lambda = 0,8$$



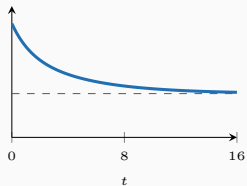
racines complexes

$$\text{module } 0,85$$

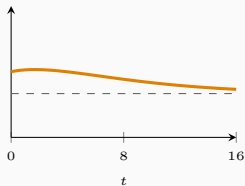


temps continu

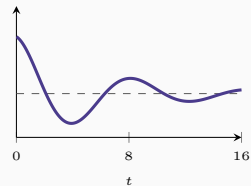
$$\lambda_1, \lambda_2 < 0$$



racine double $\lambda < 0$



complexes, partie réelle < 0



Cas 1 : deux racines réelles distinctes

Discriminant strictement positif

Discret

$$y_t = C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t$$

Continu

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Un exemple discret

$y_{t+2} = 1,25 y_{t+1} - 0,36 y_t$. Équation caractéristique : $\lambda^2 - 1,25\lambda + 0,36 = 0$.

$\Delta = 1,5625 - 1,44 = 0,1225$, donc $\sqrt{\Delta} = 0,35$ et

$$\lambda = \frac{1,25 \pm 0,35}{2} \implies \lambda_1 = 0,8, \quad \lambda_2 = 0,45$$

$$y_t = C_1 0,8^t + C_2 0,45^t$$

La racine dominante

$0,45^t$ s'écrase bien plus vite que $0,8^t$. Au bout de quelques périodes, la trajectoire est **entièrement gouvernée par la plus grande racine en module**.

C'est un principe général : c'est toujours la **racine dominante** qui décide du comportement de long terme. On peut souvent négliger les autres.

Discriminant nul

Discret

$$y_t = (C_1 + C_2 t) \lambda^t$$

Continu

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$$

Pourquoi ce facteur t

Une équation d'ordre 2 a besoin de **deux** solutions indépendantes pour engendrer toutes les trajectoires. Une seule racine n'en fournit qu'une.

Multiplier par t produit la seconde, et l'on vérifie qu'elle satisfait bien l'équation. La formule est **identique dans les deux langages**, au remplacement de λ^t par $e^{\lambda t}$ près.

Un exemple continu

$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$. Caractéristique : $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$, racine double $\lambda = -2$.

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-2t}$$

Le facteur t croît, mais e^{-2t} décroît bien plus vite : la trajectoire tend vers zéro, après un éventuel dépassement.

Discriminant strictement négatif

Les racines s'écrivent $\lambda = \alpha \pm i\beta$. On les met alors sous forme trigonométrique.

Discret

$$\lambda = r(\cos \theta \pm i \sin \theta)$$

$$y_t = r^t (C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t)$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} : \text{module}$$

$$\theta = \arctan(\beta/\alpha) : \text{argument}$$

Continu

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

α : partie réelle

β : pulsation

Lire ces deux formules

Chacune est le produit de deux choses :

- une **enveloppe** qui grandit ou rétrécit : r^t ou $e^{\alpha t}$;
- une **oscillation** de période fixe : cos et sin.

D'où le vocabulaire : r ou α décide de l'**amplitude** (amortie, entretenue, explosive); θ ou β décide de la **période** du cycle.

Un exemple discret avec cycle

$y_{t+2} = y_{t+1} - 0,5 y_t$. Caractéristique : $\lambda^2 - \lambda + 0,5 = 0$, $\Delta = 1 - 2 = -1$.

$$\lambda = \frac{1 \pm i}{2} = 0,5 \pm 0,5 i$$

Module : $r = \sqrt{0,25 + 0,25} = 0,707$. Argument : $\theta = \arctan(1) = \pi/4$.

$$y_t = 0,707^t \left(C_1 \cos \frac{\pi t}{4} + C_2 \sin \frac{\pi t}{4} \right)$$

La période du cycle

$$\text{période} = \frac{2\pi}{\theta} = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8 \text{ périodes}$$

Si la période élémentaire est le trimestre, le modèle engendre un **cycle de deux ans**, dont l'amplitude est divisée par deux tous les deux ans environ ($0,707^4 = 0,25$).

Voilà comment une équation à deux coefficients produit un cycle économique complet — avec sa durée et son amortissement.

Caler les constantes

Deux inconnues, deux équations

Discret

Continu

écrire y_0 et y_1

écrire $y(0)$ et $\dot{y}(0)$

système 2×2 en C_1, C_2

système 2×2 en C_1, C_2

Sur le premier exemple

$y_t = C_1 0,8^t + C_2 0,45^t$, avec $y_0 = 100$ et $y_1 = 60$.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 100 \\ 0,8 C_1 + 0,45 C_2 = 60 \end{cases}$$

De la première : $C_2 = 100 - C_1$. En reportant :

$$0,8 C_1 + 45 - 0,45 C_1 = 60 \implies 0,35 C_1 = 15 \implies C_1 = 42,86$$

d'où $C_2 = 57,14$ et

$$y_t = 42,86 \times 0,8^t + 57,14 \times 0,45^t$$

Un système linéaire, encore

Comme pour l'optimisation à deux variables, l'étape finale est la résolution d'un système 2×2 .

Avec les systèmes du chapitre 9, ce sera un système $n \times n$ — et l'algèbre linéaire deviendra indispensable.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. L'ordre 2 apparaît dès qu'un modèle réagit à une **variation** — l'accélérateur d'investissement.
2. Dans les deux langages, on essaie une solution exponentielle et l'on tombe sur un **trinôme du second degré**.
3. Trois cas : racines réelles distinctes, racine double avec facteur t , racines complexes.
4. Racines complexes : **enveloppe** (r^t ou $e^{\alpha t}$) multipliée par une **oscillation** de période $2\pi/\theta$ ou $2\pi/\beta$.
5. Les deux constantes se calent sur les deux conditions initiales, par un système 2×2 .

La suite

On sait résoudre. Reste à savoir **quand cela converge** : à l'ordre 2, la condition n'est plus une inégalité simple mais une région du plan des coefficients.

C'est le chapitre 8, et c'est là que le triangle de stabilité apparaît.